О СУЩЕСТОВАНИИ МИНИМУМА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Арутюнов А. В.[1], Жуковская З. Т.[2], Жуковский С. Е.[3]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Рассматривается задача минимизации дифференцируемого функционала, определенного на выпуклом подмножестве нормированного пространства. Классические условия существования минимума в таких задачах содержат явно или неявно предположение компактности области определения, а их доказательства основаны на теореме Вейерштрасса. В настоящей работе рассматривается подход, основанный на условии типа Карисити и не содержащий предположения компактности области определения функционала в каких-либо естественных топологиях. В терминах первой производной функционала получены достаточные условия существования минимумов, получены оценки расстояния от заданной точки до некоторой точки минимума. Для локально липшицевых функционалов, определенных на конечномерных пространствах, получены достаточные условия существования минимума в терминах обобщенной производной Кларка и оценки расстояния от заданной точки до некоторой точки минимума. Обсуждаются приложения полученных результатов к абстрактным уравнениям. В качестве следствия достаточных условий существования минимума дифференцируемой функции получены условия разрешимости абстрактных нелинейных уравнений и оценки решений.

Ключевые слова: условие типа Каристи, условный минимум, теорема существования минимума, производная Кларка.

1. Введение

Прежде чем перейти к постановке задачи напомним некоторые результаты, связанные с вопросами существования минимумов. Пусть (V,ρ) – метрическое пространство, $f\colon V \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная функция, $k > 0$ – заданное число. Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию типа Каристи с константой k, если

$$\forall x \in V\colon\ f(x) > 0\ \ \exists x' \in V\colon\ f(x') + k\rho(x,x') \le f(x).$$

[1] *Арам Владимирович Арутюнов, д.ф.-м.н., г.н.с.* (arutyunov@cs.msu.ru).
[2] *Зухра Тагировна Жуковская, к.ф.-м.н., с.н.с.* (zyxra2@yamdex.ru).
[3] *Сергей Евгеньевич Жуковский, д.ф.-м.н., г.н.с.* (s-e-zhuk@yandex.ru).

Известно (см., например, [1, 3]), что если для функции f выполнено условие типа Каристи, то f имеет по крайней мере одну точку минимума; более того,

$$\forall x \in V \quad \exists \bar{x} \in V\colon\ f(\bar{x}) = 0 \ \text{ и } \ \rho(x, \bar{x}) \leq \frac{f(x)}{k}.$$

Примером функции, для которой условие типа Каристи выполняется, является функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$. Отметим, что если V – нормированное пространство, а функция f дифференцируема в точке минимума по Гато, то условие типа Каристи не выполняется для f ни при каком $k > 0$. Однако если V является собственным подмножеством нормированного пространства, то условие типа Каристи может выполняться и для дифференцируемых функций f.

В настоящей работе мы рассматриваем следующую задачу. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – нормированное пространство, $V \subset X$ –собственное замкнутое выпуклое подмножество, $f\colon X \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $k > 0$ – заданное число. Рассмотрим задачу

(1) $\quad f(x) \to min, \ \ x \in V.$

Цель настоящей работы состоит в получении аналогичных условий существования решения задачи (1) в терминах производной Гато и производной Кларка.

2. Достаточные условия минимума гладких функций

Введем необходимые обозначения.

Для произвольного множества $U \subset X$ обозначим через $cone\ U$ коническую оболочку множества U, т.е.

$$cone\ U = \{tx\colon t \geq 0, x \in U\},$$

а через $cl\ U$ – замыкание множества U. Через X^* обозначим пространство топологически сопряженное с X. Для функционала $\varphi \in X^*$ обозначим его значение на векторе h через $\langle \varphi, h \rangle$. Для произвольной точки $x \in V$ через $T(V, x)$ обозначим касательный конус ко множеству V в точке x, т.е.

$$T(V, x) = cl\ (cone\ \{v - x\colon v \in V\}).$$

Для точки $x \in X$, в которой функция f дифференцируема по Гато, обозначим через $\Delta f(x)$ ее производную по Гато.

Теорема 1. *Предположим, что* $f(x) \geq 0$ *для любого* $x \in V$, *функция* f *дифференцируема по Гато в каждой точке* $x \in V$, *в которой* $f(x) > 0$. *Если*

$$inf\{\langle \Delta f(x), h\rangle : h \in T(V,x), \|h\| = 1\} \leq -s$$

$$\forall x \in V: \quad f(x) > 0,$$

то для любого положительного $k < s$, *для любого* $x \in V$ *существует точка* $\bar{x} \in V$ *такая, что*

$$f(\bar{x}) = 0 \quad \text{и} \quad \|x - \bar{x}\| \leq \frac{f(x)}{k}.$$

Доказательство. Возьмем произвольное положительное $k < s$ и произвольную точку $x \in V$. Покажем, что для функции f на V выполнено условие типа Каристи с константой k.

Зафиксируем $\beta \in (k, s)$. Возьмем произвольную точку $x \in V$, для которой $f(x) > 0$. По предположению теоремы существует вектор $h \in V$ такой, что

$$\langle \Delta f(x), h\rangle \leq -\beta, \quad \|h\| = 1,$$

и $x + th \in V$ при достаточно малых t.

Положим $x'(t) := x + th,\ t > 0$. Поскольку функция f дифференцируема по Гато в точке x, то существует функция $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$f\big(x'(t)\big) = f(x) + \langle \Delta f(x), th\rangle + r(t) \quad \forall\, t > 0,$$

$$\frac{r(t)}{t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0+.$$

Возьмем положительное число τ такое, что

$$r(\tau) \leq (\beta - k).$$

Имеем

$$f\big(x'(\tau)\big) + k\|x'(\tau) - x\| =$$

$$= f(x) + \tau\langle \Delta f(x), h\rangle + r(t) + k\tau \leq$$

$$\leq f(x) - \tau(\beta - k) + r(\tau) \leq f(x).$$

Таким образом, точка $x' = x'(\tau)$ отвечает точке x в силу условия типа Каристи для функции f на множестве V. Следовательно, существование искомой точки $\bar{x} \in V$ вытекает из [1, теорема 3] □

Проиллюстрируем приложение полученной теоремы, применив ее к задаче существования решения нелинейного уравнения. Пусть $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ – гильбертовы пространства, $F: X \to Y$ – дифференцируемое по Фреше отображение, $K \subset X$ – выпуклый замкнутый конус.

Предложение 1. *Если существует* $s > 0$ *такое, что*

$$F'(x)(B_X \cap \mathrm{cl}\ cone\ (K - x)) \supset sB_Y \quad \forall x \in X,$$

то для любого положительного $k < s$, *для любого* $x \in K$, *для любого* $\bar{y} \in Y$ *существует точка* $\bar{x} \in K$ *такая, что*

$$F(\bar{x}) = \bar{y} \text{ и } \|x - \bar{x}\| \le \frac{\|F(x) - \bar{y}\|}{k}.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно положить $V = K, f(x) = \|F(x) - \bar{y}\|,\ x \in K$ и применить теорему 1.

3. Достаточные условия минимума локально липшицевых функций

Пусть теперь $X = V = \mathbb{R}^n$, функция $f: X \to \mathbb{R}$ локально липшицева. По теореме Радемахера множество $L \subset X$ точек, в которых f дифференцируема, имеет полную меру и, в частности, всюду плотно. Поэтому $cl\ L = X$. Производной Кларка функции f в точке x принято называть множество $\partial f(x)$, определяемое равенством

$$\partial f(x) = cl\ (cone\{\varphi \in X^* |\ \exists\{x_i\} \subset L\colon\ x_i \to x, f'(x_i) \to \varphi\}).$$

Здесь $f'(x)$ – производная функции f в точке x. Свойства производной Кларка подробно исследованы в [3].

Теорема 2. *Предположим, что* $f(x) \ge 0$ *для любого* $x \in X$. *Если*

$$|\varphi| \ge s \qquad \forall\, x \in X\colon \quad f(x) > 0,\ \forall \varphi \in \partial f(x),$$

то для любого положительного $k < s$, *для любого* $x \in X$ *существует точка* $\bar{x} \in X$ *такая, что*

$$f(\bar{x}) = 0 \text{ и } |x - \bar{x}| \le \frac{f(x)}{k}.$$

Доказательство. Покажем, что для функции f выполнено условие типа Каристи с константой k. Предположим, противное, т.е.

$$\exists x \in X\colon\ f(x) > 0 \text{ и } f(x') + k|x - x'| \ge f(x) \quad \forall x' \in X.$$

Это соотношение означает, что точка x является точкой минимума функции $g(x') = f(x') + k|x - x'|,\ x \in X$. Следовательно, $0 \in \partial g(x)$ в силу необходимых условий минимума для локально липшицевых функций. Кроме того, поскольку производная нормы в нуле является единичным шаром в сопряженным пространстве, а производная Кларка суммы функций содержится в сумме производных Кларка, то

$0 \in \partial g(x) \subset \partial f(x) + kB.$

Здесь kB – шар в пространстве X^* с центром в нуле радиуса k. Из доказанного соотношения следует, что

$\exists \varphi \in \partial f(x)\colon\ |\varphi| \le k.$

Однако, по предположению теоремы $|\varphi| \ge s$ и $s > k$. Получено противоречие. Таким образом, доказано, что для функции f выполнено условие типа Каристи с константой k. Существование искомой точки $\bar{x} \in V$ вытекает из [1, теорема 3] □

Литература

1. АРУТЮНОВ А.В. У*словие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения* // Труды МИАН. – 2015. – Т. 291. – С. 30–44.
2. CLARKE F.H. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* N.Y.: Wiley, 1983.
3. FABIAN M., PREISS D. *A generalization of the interior mapping theorem of Clarke and Pourciau* // Comment. Math. Univ. Carol. – 1987. – Vol. 28. – P. 311–324.

ON THE EXISTENCE OF A MINIMUM OF DIFFERENTIATED FUNCTIONS IN NORMED SPACES

Aram Arutyunov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor. Phys. Math. Sc., Chief Researcher (arutyunov@cs.msu.ru).

Zukhra Zhukovskaya, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand. Phys. Math. Sc., Senior Researcher (zyxra2@yandex.ru).

Sergey Zhukovskiy, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor. Phys. Math. Sc., Leading Researcher (s-e-zhuk@yandex.ru).

Abstract: We consider the problem of minimizing a differentiable functional defined on a convex subset of a normed space. The classical conditions for the existence of minima in such problems contain explicitly or implicitly the assumption that the domain is compact. The corresponding proofs are based on the Weierstrass theorem. In this paper, we consider an approach based on a Carisiti-like condition and not *containing the assumption that the domain of the functional is compact in any natural topologies. In terms of the first derivative of the functional, sufficient conditions for the existence of minima are obtained, and estimates of the distance from a given point to a certain minimum point are obtained. For locally Lipschitz functionals defined on finite-dimensional spaces, sufficient conditions for the existence of a minimum are obtained in terms of the generalized Clarke derivative and an estimate for the distance from a given point to a certain minimum point. Applications of the results obtained to abstract equations are discussed. As a corollary of sufficient conditions for the existence of a minimum of a differentiable function, conditions for the solvability of abstract nonlinear equations and estimates for solutions are obtained.*

Keywords: Caristi-like condition, constrained minimum, minimum existence theorem, Clarke differential.

УДК 517
ББК 22.162