О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ K-ИЗ-N К ФОРМЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ ЖИЗНИ И РЕМОНТА ЕЁ КОМПОНЕНТ[1]

Иванова Н. М.[2]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва Российский университет дружбы народов, Москва*)

Методы повышения надежности, а также исследование чувствительности стохастических систем являются важными вопросами в теории надежности. Под чувствительностью систем обычно подразумевают зависимость её свойств от изменения каких-либо внутренних параметров. Системы горячего резервирования k-из-n вызывают высокий интерес среди исследователей, так как имеют широкий потенциал применения в прикладных задачах в самых разных сферах человеческой деятельности. В докладе исследуется проблема чувствительности характеристик надежности восстанавливаемой системы k-из-n:F с частичным ремонтом к виду входных распределений при фиксированных параметрах этих распределений. Ранее для такой системы с помощью введения двумерного Марковского процесса был получен вид стационарного распределения вероятностей с показательным временем безотказной работы и произвольным распределением времени восстановления в терминах преобразования Лапласа времени ремонта. Полученный результат может быть применен для исследования чувствительности характеристик системы к виду распределения времени ремонта. Однако для исследования поведения системы при произвольном распределении времени жизни необходимо прибегнуть к другим методам. В настоящей работе для исследования чувствительности системы k-из-n:F к виду распределений как времени жизни, так и времени ремонта, применяется имитационное моделирование. На примере 3-из-6 рассматривается стационарная готовность системы в случае, если длительности жизни и ремонта компонент имеют распределения экспоненциальное, Гнеденко – Вейбулла или гамма.

Ключевые слова: надежность системы, система *k*-из-*n*:F, анализ чувствительности, имитационное моделирование.

[1] *Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-06043 и при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.*

[2] *Ника Михайловна Иванова, м.н.с.* (nm_ivanova@bk.ru).

1. Введение

В настоящее время анализ чувствительности прикладных систем имеет высокий интерес среди исследователей в различных сферах деятельности, в которых термин «чувствительность» понимается по-разному. В исследовании операций анализ чувствительности разработан как метод критической оценки переменных, принимаемых при принятии решения, и способен идентифицировать те чувствительные переменные, которые влияют на конечный желаемый результат [7]. В стохастических системах устойчивость часто означает нечувствительность или низкую чувствительность их выходных характеристик к форме некоторых входных распределений, что часто исследуется в задачах надежности [3]. Другим подходящим дополнением к вероятностному анализу надежности является анализ структурной чувствительности [6].

Первые работы, посвященные нечувствительности характеристик систем к форме распределения времени обслуживания, опубликованы Б. Севастьяновым в 1957 г. [4], который доказал нечувствительность формул Эрланга с пуассоновским входным потоком к форме распределений времени работы с фиксированным средним значением. Б. Гнеденко показал, что при «быстром» восстановлении функция надежности системы с холодным резервом стремится к экспоненциальной для любых времен жизни и ремонта её элементов [2]. Этот результат означает асимптотическую нечувствительность характеристик надёжности такой системы к формам распределения их жизни и времени восстановления.

Асимптотическая нечувствительность характеристик систем также была предметом недавних исследований, в которых изучалась проблема устойчивости стационарных характеристик систем в случае, когда одно из входных распределений является экспоненциальным [8].

Настоящая работа продолжает исследование систем k-из-n:F и анализ их чувствительности. Системы такого типа нашли широкое практическое приложение в различных отраслях: телекоммуникационной отрасли и робототехнике [1], нефтегазовой отрасли [10], системах мониторинга подводных трубопроводов [9] и многих других.

В докладе рассматриваются стационарные характеристики системы k-из-n:F с частичным ремонтом, исследуется чувствительность этих характеристик с форме распределений времени жизни и ремонта её компонент при фиксированных среднем значении и коэффициенте вариации.

2. Постановка задачи и обозначения

Рассмотрим ремонтируемую систему k-из-n:F, состоящую из n компонент, k из которых могут отказать, что приводит к отказу всей системы и последующему восстановлению. Пусть для ремонта элементов и всей системы имеется одна ремонтная единица. Отказавший элемент системы немедленно начинает восстанавливаться. При отказе всей системы, т.е. k-й компоненты, также начинается ремонт, и после его завершения система начинает заново функционировать, а ремонт оставшихся $k-1$ элементов продолжается. Такую схему функционирования системы назовем частичным ремонтом.

Обозначим через A_i, $i = 1, 2, \ldots$, время жизни элементов системы, а через B_i, $i = 1, 2, \ldots$, – время их ремонта и предположим, что эти случайные переменные взаимно независимы и одинаково распределены. Их функции распределения обозначаются как $A(x) = \mathrm{P}\{A_i \le x\}$ и $B(x) = \mathrm{P}\{B_i \le x\}$ соответственно, $i = 1, 2, \ldots$ Для времени ремонта введем также среднее и соответствующую интенсивность

$$b = \int_0^\infty (1 - B(x))dx, \quad \beta(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)}.$$

Обозначим через $E = \{0, 1, 2, \ldots, k-1, k\}$ множество состояний системы, где

- 0 означает, что все n компонент работают;
- i означает, что i компонент из n $(1 \le i \le k-1)$ выходят из строя, одна из них ремонтируется, а другие $n - i$ работают;
- k означает, что k компонент вышли из строя, вся система вышла из строя и ремонтируется.

Введём случайный процесс $J = \{J(t), t \geq 0\}$, где $J(t) = j$, если за время t система находится в состоянии j, $j \in E$.

В докладе рассматривается вычисление зависящих от времени вероятностей состояний системы

$$\pi_i(t) = \mathrm{P}\{J(t) = j\}, \quad j \in E$$

и стационарные вероятности состояний системы

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{J(t) = j\}, \quad j \in E\,,$$

а также коэффициент доступности (готовности)

$$K_{av} = \sum_{0\leq i\leq k-1} \pi_i = 1 - \pi_k\,.$$

В дальнейшем для сокращенного описания систем k-из-n используется модифицированная нотация Кендалла, $<GI_{k<n}|GI|1>$. Здесь символ GI означает произвольное распределение времени жизни и ремонта компонент системы соответственно для первой и второй позиции. Цифра 1 на последней позиции означает количество ремонтных единиц. Символы « < > » говорят о том, что рассматриваемая система является замкнутой.

3. Математическая модель системы k-из-n:F

Рассмотрим систему k-из-n:F с показательным распределением времени жизни компонент (с интенсивностью α) и произвольно распределенным временем ремонта. Для исследования такой системы воспользуемся методом введения дополнительных переменных, где в качестве дополнительной переменной используется затраченное время на ремонт отказавшей компоненты. Обозначим через

$$\{Z(t)\}_{t\geq 0} = \{J(t), X(t)\}_{t\geq 0}$$

двумерный процесс, где $J(t)$ — это состояние системы за время t, а $X(t)$ — время, прошедшее с момента ремонта отказавшего элемента или всей системы. Благодаря дополнительным переменным процесс $Z(t)$ является марковским, его граф переходов представлен на рис. 1. Здесь $\lambda_i = (n - i)\alpha$, $i = 0, \ldots, k - 1$, – интенсивность отказа системы, когда выходят из строя i компонент из n.

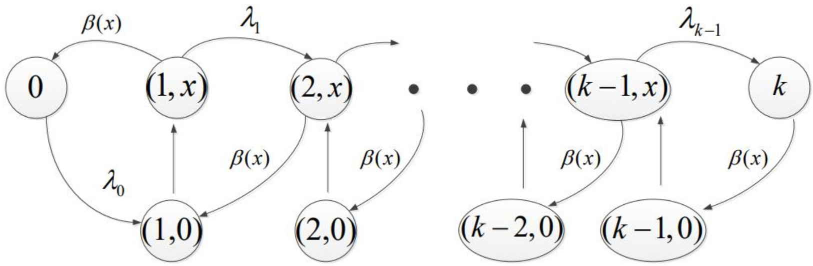

Рис. 1. Граф переходов системы k-из-n с частичным ремонтом

Обозначим через

- $\pi_0 = \mathrm{P}\{J(t) = 0\}$ – вероятность работоспособного состояния всех k компонент в момент времени t;
- $\pi_i(t;\ x) = \mathrm{P}\{\mathrm{J}(t) = i;\ x < X(t) \le x + dx\}$ – совместная вероятность того, что в момент t имеется i неисправных компонент, одна компонента ремонтируется с истекшим временем ремонта между x и $x + dx$, $i = 1, \ldots, k$.

Система уравнений Колмогорова в частных производных для вероятностей состояния исследуемой системы имеет вид

$$\frac{d}{dt}\pi_0(t) = -\lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \pi_1(t,x)\beta(x)dx,$$

$$(1)\quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t,x) = -(\lambda_1 + \beta(x))\pi_1(t,x),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_i(t,x) = -(\lambda_i + \beta(x))\pi_i(t,x) + \lambda_{i-1}\pi_{i-1}(t,x), \quad i = \overline{2,k-1},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_k(t,x) = -\beta(x)\pi_k(t,x) + \lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t,x)$$

совместно с начальным $\pi_0(0) = 1$ и граничными условиями

$$\pi_1(t,0) = \lambda_0\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_2(t,x)dx,$$

$$(2)\quad \pi_i(t,0) = \int_0^t \beta(x)\pi_{i+1}(t,x)dx, \quad i = \overline{2,k-1},$$

$$\pi_k(t,0) = 0.$$

При $t \to \infty$ системы уравнений (1)–(2) примут вид обыкновенных дифференциальных уравнений. Их решение, найденное, например, методом вариации постоянных, даст вид стационарного распределения вероятностей системы k-из-n:F в терминах преобразования Лапласа времени ремонта [5].

4. Имитационная модель и анализ чувствительности

Проведем анализ чувствительности системы k-из-n:F к виду функции распределения времени жизни и ремонта её компонент с помощью имитационного моделирования. Результаты анализа будут показаны на примере системы 3-из-6.

Для построения имитационной модели исследуемой системы был выбран язык программирования Python. Имитационное моделирование проводилось с помощью метода дискретно-событийного моделирования. Для проведения экспериментов были использованы следующие данные:

- общее время моделирования $T = 10^4$;
- в качестве параметра системы использовано значение $\rho = a/b$ – относительная скорость восстановления системы (a, b – средние длительности жизни и восстановления компонент системы соответственно);
- в качестве распределений длительностей жизни и ремонта были выбраны распределения гамма (G) и Гнеденко – Вейбулла (GW), для который фиксировались средние значения, а также коэффициент вариации.

В первом эксперименте сравним результаты, полученные с помощью математической модели и имитационного моделирования для коэффициента готовности K_{av} системы $\langle M_{3<6}|GI|1\rangle$. В качестве времени жизни используется экспоненциальное распределение с параметром $\alpha = 0{,}5$, соответствующее среднее равно 2. Коэффициент вариации времени жизни $c = 1$. Время ремонта имеет распределения, обозначенные выше, с фиксированными средним значением $b = [0{,}1;\ 5]$ и коэффициентом вариации $c = 0{,}5$ и $c = 2$ (рис. 2).

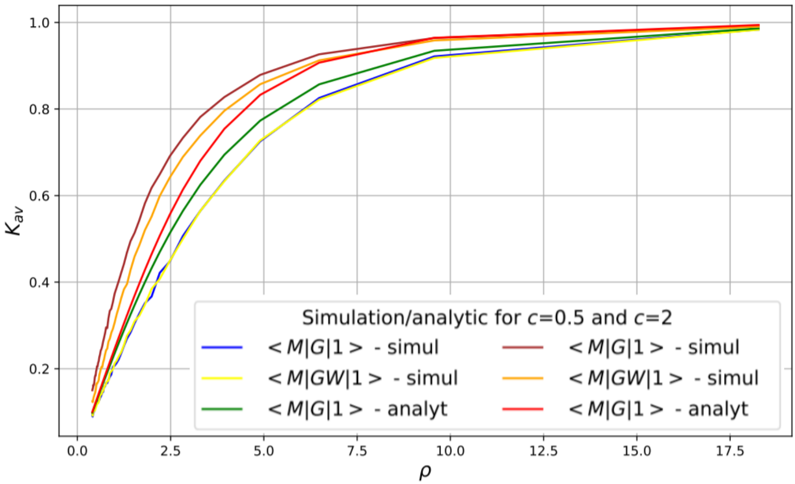

Рис. 2. Сравнение аналитических и имитационных результатов коэффициента готовности для системы $<M_{3<6}|GI|1>$

Левый и правый столбец обозначений в легенде рис. 2 отражают результаты моделирования и аналитики для разных значений коэффициента вариации. Аналитические результаты представлены для случая гамма-распределения времени ремонта. В случае имитационного моделирования рассмотренные распределения показывают схожее поведение кривых K_{av} для рассматриваемых значений c. Представленный пример показывает, что при относительно небольших ρ поведение системы зависит от коэффициента вариации времени ремонта при фиксированном среднем. Отметим, что если увеличить разницу между рассматриваемыми значениями c (например, не в 4 раза, как в представленном примере, а в 10 раз), то при небольших значениях ρ разница между кривыми коэффициента готовности также увеличится. Однако при $\rho \to \infty$ система k-из-n:F асимптотически нечувствительна к виду распределения этого времени при фиксированном среднем и коэффициенте вариации.

В качестве второго примера рассмотрим систему $<GI_{3<6}|GI|1>$, характеристики которой были вычислены только с помощью имитационной модели. Пусть имеются следующие параметры системы: $a = 1{,}5$, $b = [0{,}1; 2]$, коэффициент вариации времени ремонта $c = 0{,}5$. Рассматривается зависимость K_{av} от относительной скорости восстановления ρ при разных значениях коэффициента вариации времени жизни.

Рисунок 3 демонстрирует результаты моделирования для $c = 0{,}5$ времени жизни. График показывает, что поведение кривых очень близко друг к другу при разных распределениях как времени жизни, так и времени ремонта. На рассматриваемом интервале значений ρ максимальная разница между двумя группами кривых, отражающих разные распределения времени жизни, составила приблизительно 0,02. Таким образом, пример подтверждает, что система k-из-n:F асимптотически нечувствительна к виду распределения времени ремонта при фиксированных среднем и коэффициенте вариации. Кроме того, он также демонстрирует, что при малом значении коэффициента вариации времени жизни система нечувствительна к виду распределения этого времени.

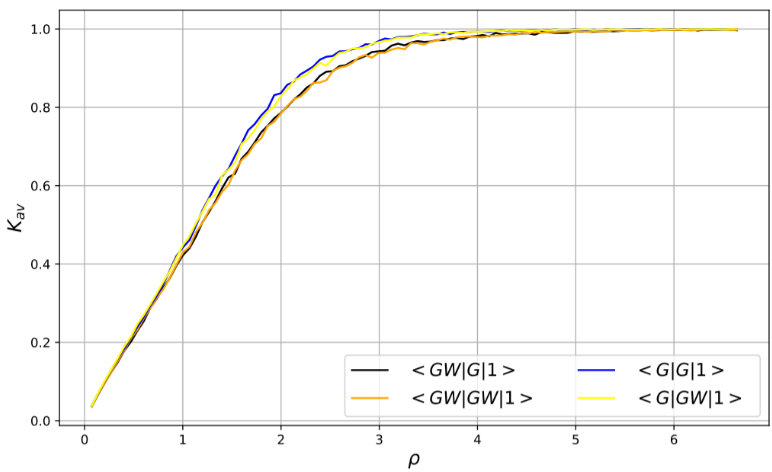

Рис 3. Сравнение имитационных результатов коэффициента готовности для системы $<GI_{3<6}|GI|1>$ ($c = 0{,}5$)

Используя рассмотренные выше параметры системы, рассмотрим случай, когда $c = 2$ для времени жизни (рис. 4).

Как и прежде, из графика видно, что система нечувствительна к виду распределения времени ремонта. Однако при новом значении коэффициента вариации времени жизни поведение кривых отлично для распределений гамма и Гнеденко – Вейбулла.

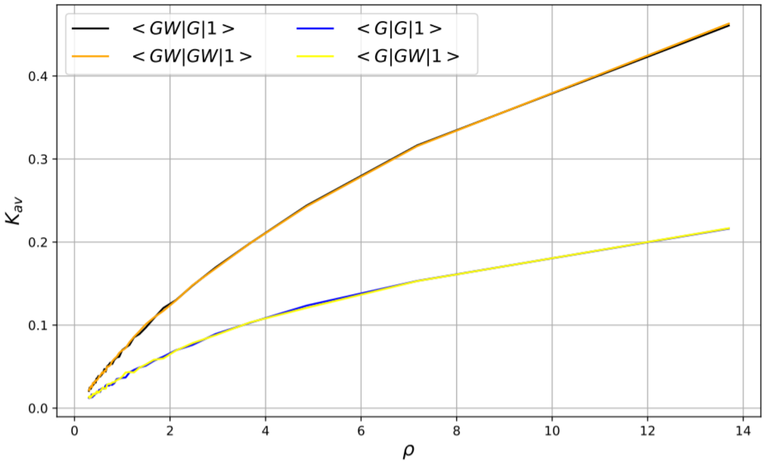

Рис 4. Сравнение имитационных результатов коэффициента готовности для системы $GI_{3<6}|GI|1$> (c = 2)

На рассматриваемом интервале ρ значения K_{av} для двух групп кривых имеют существенные различия. Приведем значения K_{av} для больших ρ, чтобы сделать оценку о скорости сходимости (таблица 1).

Таблица 1. Значения K_{av} *системы* <$GI_{3<6}|GI|1$> *для больших* ρ

ρ	50	200	500	1000
<$GW_{3<6}|GW|1$>	0,7140	0,9606	0,9918	0,9981
<$G_{3<6}|G|1$>	0,3181	0,5973	0,7956	0,9223

Как видно из таблицы, асимптотическая нечувствительность системы к виду функции распределения времени жизни при фиксированных среднем и коэффициенте вариации c = 2 очень медленная. При большем значении c, вероятно, эта сходимость будет еще медленнее, а различия между кривыми при разных распределениях времени жизни элементов только увеличатся.

5. Заключение

В настоящем докладе исследована чувствительность стационарных характеристик системы k-из-n:F с частичным ремонтом с помощью имитационного моделирования. Рассмотренные примеры показали, что система асимптотически нечувствительна к виду распределения времени ремонта её компонент при фиксированных среднем и коэффициенте вариации. Однако система зависима от коэффициента вариации времени жизни.

Литература

1. ВИШНЕВСКИЙ В.М., КОЗЫРЕВ Д.В., РЫКОВ В.В., НГУЕН З.Ф. *Моделирование надёжности беспилотного высотного модуля привязной телекоммуникационной платформы* // Информационные технологии и вычислительные системы – 2020 – №4. – С. 26–38.
2. ГНЕДЕНКО Б.В. *О дублировании с восстановлением* // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. – 1964. – №5. – С. 111–118.
3. РЫКОВ В.В., ЧАН АНЬ НГИА. *О чувствительности характеристик надежности систем к виду функций распределения времени безотказной работы и восстановления их элементов* // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. – 2014. –№3. – С. 65–77.
4. СЕВАСТЬЯНОВ Б.А. *Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами* // Теория вероятностей и ее применения. – 1957. – Т. 2, вып. 1 – С. 106–116.
5. УАНКПО Г.Ж., КОЗЫРЕВ Д.В., НИБАСУМБА Э., МУАЛЬ М.Н.Б. *Анализ надежности однородной системы передачи данных горячего резервирования* // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 87. – С. 5–25.

6. KALA Z. *Global sensitivity analysis of reliability of structural bridge system* // Eng. Struct. – 2019. – Vol. 194 – P. 36–45. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.05.045.
7. KALA Z. *Quantile-oriented global sensitivity analysis of design resistance* // J. Civ. Eng. Manage. – 2019. – Vol. 25(4). – P. 297–305. – DOI: https://doi.org/10.3846/jcem.2019.9627.
8. RYKOV V., IVANOVA N., KOZYREV D. *Sensitivity analysis of a* k*-out-of-*n*:F system characteristics to shapes of input distribution* // In: Vishnevskiy V.M., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (eds) Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2020. Lecture Notes in Computer Science. – 2020. – Vol. 12563. – P. 485–496. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-66471-8_37.
9. RYKOV V., KOCHUEVA O., FARKHADOV M. *Preventive Maintenance of a k-out-of-n System with Applications in Subsea Pipeline Monitoring* // J. Mar. Sci. Eng. – 2021. – Vol. 9. – P. 85. – DOI: https://doi.org/10.3390/jmse9010085.
10. RYKOV V., SUKHAREV M., ITKIN Y. *Investigations of k-out-of-n systems application possibilities to objects of oil and gas industry* // Mar. Sci. Eng. – 2020 – Vol. 8. – P. 928.

ON SENSITIVITY OF A K-OUT-OF-N SYSTEM RELIABILITY CHARACTERISTICS TO THE SHAPE OF LIFE AND REPAIR TIME DISTRIBUTIONS OF ITS COMPONENTS

Nika Ivanova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, (nm_ivanova@bk.ru).

Abstract: Methods for increasing reliability, as well as studying the sensitivity of stochastic systems, are important issues in reliability theory. The system's sensitivity is usually understood as the dependence of its properties on changes in some internal parameters. Hot standby k-out-of-n systems are of great interest among researchers since they have a broad potential for application in applied problems in various spheres of human activity. The report examines the sensitivity problem of the reliability characteristics of the repairable k-out-of-n:F system with partial repair to the shape of its input distributions with fixed parameters. Earlier, for such *a system, by introducing a two-dimensional Markov process, stationary probability distribution with an exponential lifetime and arbitrarily distributed repair time in terms of the Laplace transform of the repair time was obtained. This result can be applied to study the sensitivity of the system characteristics to the shape of repair time distribution. However, to describe the system's behavior with an arbitrarily distributed lifetime, it is necessary to resort to other methods. In this paper, to study the sensitivity of a k-out-of-n:F system to the shape of distributions of both life- and repair time, simulation modeling is used. Using the example of 3-out-of-6, the stationary availability of the system is considered if the life and repair time distributions of the components are exponential, Gnedenko-Weibull, or Gamma.*

Keywords: system reliability, k-out-of-n:F system, sensitivity analysis, simulation modeling.

УДК 519.873 + 004.94
ББК 22.171