УПРАВЛЕНИЕ В ИГРАХ НА СЛУЧАЙНЫХ ГРАФАХ

Петров И. В.[1]

(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

В работе исследуется теоретико-игровая модель взаимодействия экономических агентов на сети с целью сравнения эффективности прямых трансфертов участникам и затрат на изменение сетевых характеристик графа взаимодействия. Рассмотрены три задачи управления: задача стимулирования и задачи управления структурой сети на примере управления характеристиками сети и управления статистиками подграфов. Показано, что управление сетевыми характеристиками взаимодействия участников может быть эффективнее прямых стимулирующих трансфертов.

Ключевые слова: теория игр, игры на сетях, сетевое управление

Рассмотрим модель из класса линейно-квадратичных игр на графах [1]. Выигрыш игрока в данной модели включает выгоду от собственного действия и действий соседей, а также квадратичные издержки от принятого решения:

$$U_i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{G}) = a_i\left(b_i + \beta \sum_{j \in N} g_{ij}\, a_j\right) - \frac{1}{2} a_i^2 .$$

Здесь $a_i \in \mathbb{R}$– действия игрока I; $b_i \in \mathbb{R}$ – предельный выигрыш, независящий от действий соседей (standalone marginal return); $\{g_{ij}\} = \boldsymbol{G} \in \{0,1\}^{N \times N}$ – матрица связей между агентами. Параметр β отражает характер зависимости от действий соседей: при $\beta > 0$ действия игроков комплементарны (strategic complements), при $\beta < 0$ действия соседей взаимозаменяют друг друга (strategic substitutes).

Данная модель довольно популярна среди зарубежных исследователей [1, 3, 5]: показано, что при достаточно малых значениях параметра β равновесные стратегии игроков пропорциональны центральностям Каца – Бонашича [1]. А именно, равновесие Нэша в игре существует и единственно, если $\beta\rho(\boldsymbol{G}) < 1$ (где $\rho(\cdot)$ – спектральный радиус), а ответы игроков в равновесии в векторном виде можно представить как

$$\boldsymbol{a}^* = [\boldsymbol{I} - \beta \boldsymbol{G}]^{-1} \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{I}$ – единичная матрица. Удобно ввести функцию общественного благосостояния (social welfare function) следующего вида:

---

[1] *Илья Владимирович Петров, м.н.с.* (*ilyapetrov22@gmail.com*).

$$W(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{G}) = \sum_{i \in N} U_i(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{G}),$$

т.е. сумма выигрышей, полученных игроками в равновесии. Тогда задача управления состоит в максимизации данной функции при некоторых ограничениях. В работе рассмотрены 3 задачи управления – задача стимулирования и несколько задач управления сетевыми характеристиками взаимодействия участников с целью противопоставления эффективности различных подходов.

Задача стимулирования (англ. *incentive-targeting problem*) – максимизация функции общественного благосостояния по вектору индивидуальных предельный выигрышей $\boldsymbol{b}$, что естественно интерпретировать как целевые стимулирующие трансферты [3]. Задача управления заключается в том, чтобы выбором допустимого управления максимизировать функцию общественного благосостояния по вектору $\mathbf{b}$:

$$\max_{\boldsymbol{b}} W(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{G})$$

при условиях

$$\boldsymbol{a}^* = [\boldsymbol{I} - \beta \boldsymbol{G}]^{-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{b};$$

$$K\left(\boldsymbol{b}, \widehat{\boldsymbol{b}}\right) = \sum_{i \in N} (b_i - \widehat{b_\iota})^{\boldsymbol{2}} \leq C,$$

где бюджетное ограничение C принято выбирать пропорционально числу агентов N. В общем виде задача не решена, однако найдена эффективная сетевая эвристика (network heuristic policy) [3]:

$$\widehat{\boldsymbol{b}}_{nh} := \boldsymbol{b}\mathbb{1} + \sqrt{C} v_1,$$

где $\mathbb{1}$ – единичный вектор, v_1 – собственный вектор матрицы $\boldsymbol{G}$, соответствующий максимальному собственному значению.

Управление характеристиками сети. Поиск решение задачи управления посредством изменения связей между участниками может вызвать трудности даже для малых графов. Перспективным выглядит переход от отдельно взятого графа к вероятностным моделям, являющимися в некотором смысле предельными объектами для имеющейся структуры связей. В таком случае задача управления структурой графа может быть сформулирована и решена в терминах некоторых предельных свойств имеющейся структуры связи между участниками – в данной работе мы рассмотрели влияние степени кластеризации [4] графа взаимодействия на функцию общественного благосостояния. Используя теорию пределов графов [5], мы сводим задачу правления сетевой структурой к задаче управления степенью кластеризации графа [6] (рис. 1). В качестве сети взаимодействия между участниками $\boldsymbol{G}$ рассмотрим случай симметричной стохастической блочной модели (symmetric stochastic block model, symmetric SBM). SBM является расширением модели случайного графа (модели Эрдёша – Реньи) на случай произвольного числа кластеров k, каждый из которых в отдельности является моделью случайного графа. В общем случае число параметров связи внутри и между кластерами составляет k^2, однако в симметричной версии модели их всего два – кластеры связаны эквивалентно. Матрица связей между кластерами имеет вид

$$Q = \begin{bmatrix} \gamma & \delta & \cdots & \delta \\ \delta & \gamma & \cdots & \delta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta & \delta & \cdots & \gamma \end{bmatrix}$$

Соотношение между параметрами определяет степень ассортативности графа (положительная – при $\gamma > \delta$ и отрицательная – при $\gamma < \delta$), что влияет на эффективность распределения бюджета C [8]. А именно, при $\gamma > \delta$ эффективное распределение трансфертов заключается в разделении бюджета между кластерам пропорционально их размеру и не зависит от соотношения между γ и δ. Более того, в работе [9] показано, что рост связей между кластерами также способствует увеличении скорости сходимости к равновесию в различных динамических и теоретико-игровых моделях на сетях.

Таким образом появляется возможность решения исходной задачи относительно параметров γ и δ матрицы $\mathbf{Q}$, где управление состоит в изменении числа ребер графа в межкластерных и внутрикластерных взаимодействиях. Возникает альтернативная постановка задачи максимизации:

$$\max_{\gamma,\delta} W(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{G}(\gamma, \delta)).$$

Управление статистиками подграфов. Структурные паттерны взаимодействия экономических агентов оказывают существенное влияние как на выигрыш отдельного агента, так и группы агентов и системы в целом. Мы рассматриваем экономические эффекты от отдельных структурных паттернов – мотивов сети. Локальные топологические свойства сети характеризуют статистикой появления в сети подграфов с различной конфигурацией связей: в работе [7] показано, что в случае ненаправленных сетей существенную роль играют 6 типов подграфов-тетрад (графов на четырех вершинах). Мы анализируем вклад этих конфигураций, а также конфигураций «следующего шага» (подграфов на пяти вершинах) в суммарный выигрыш агентов в игре с целью выявления локально-оптимальных конфигураций взаимодействия (рис. 2).

Нас интересует вопрос о соотношении эффективности затрат на целевые трансферты и затрат на управление сетевыми характеристиками взаимодействия участников – в работе проводится попытка соотнести эти затраты. С помощью численных экспериментов показано, что в линейно-квадратичной игре на графе управление свойствами сети может быть эффективнее прямых стимулирующих трансфертов. В общем случае задача для линейно-квадратичных игр на графах не решена, однако переход к задаче управления сетевой структурой с использованием теории пределов графов может позволить продвинуться в решении данной задачи.

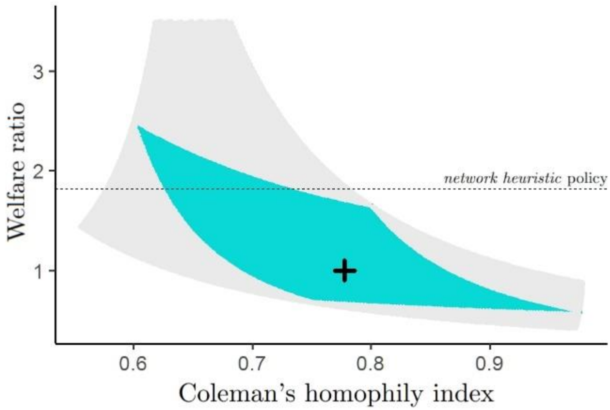

Рис. 1. Влияние кластеризации на функцию общественного благосостояния игры (1) *при* $\beta > 0$ (*strategic complements*)

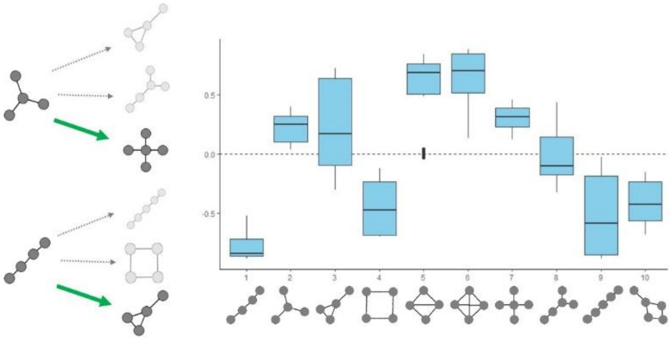

Рис. 2. Взаимосвязь между функцией общественного благосостояния и статистикой топологических мотивов в сети для игры (1) *при* $\beta > 0$

Литература

1. BALLESTER C., CALVÓ-ARMENGOL A., ZENOU Y. *Who's who in networks. Wanted: The key player* // Econometrica. – 2006. – Vol. 74, No. 5. – P. 1403–1417.
2. JACKSON M.O. *A typology of social capital and associated network measures* // Social Choice and Welfare. – 2019. – P. 1–26.
3. GALEOTTI A., GOLUB B., GOYAL S. *Targeting interventions in networks* // Available at SSRN 3054353. – 2019.
4. GOLUB B., JACKSON M.O. *How homophily affects the speed of learning and best-response dynamics* // The Quarterly Journal of Economics. – 2012. – Vol. 127, No. 3. – P. 1287–1338.
5. PARISE F., OZDAGLAR A. *Graphon games* // Proc. of the 2019 ACM Conference on Economics and Computation. – 2019. – P. 457–458.
6. COLEMAN J. *Relational analysis: the study of social organizations with survey methods* // Human Organization. –1958. – Vol. 17. – P. 28–36.
7. MILO R. et al. *Superfamilies of evolved and designed networks* // Science. – 2004. – Vol. 303, No. 5663. – P. 1538–1542.

CONTROL POLICIES IN GAMES ON STOCHASTIC NETWORKS

Ilya Petrov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher (ilyapetrov22@gmail.com).

Abstract: This paper investigates a game-theoretic model of the interaction of economic agents on a network to compare the effectiveness of direct transfers to participants and of changing the interaction network characteristics. In this work, three control problems are considered - incentive-targeting problem and structural interventions (our work): We study the effect of various control policies in different game settings. It is shown that control of network characteristics of participants' interaction can be more effective than direct stimulating transfers. Recent progress with the use of graph limits theory are examined, the results of extensive numerical experiments are given.

Keywords: games on networks, structural interventions, optimal control.

УДК 165
ББК 60.84