XVII Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами», Москва, 6–9 сентября 2021 г.

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ АВТОНОМНЫМИ КОЛЕСНЫМИ РОБОТАМИ

Генералов А. А.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Рассматривается задача управления движением автономных колесных роботов. Предполагается, что робот движется без проскальзывания вдоль криволинейного пути, спланированного на неровной поверхности. Закон управления синтезирован методом линеаризации обратной связью. Работа посвящена построению оценки инвариантной области притяжения в пространстве «боковое отклонение – угловое отклонение» с учетом ограничений на управление. Предполагается, что функция Ляпунова является квадратичной формой. Условие отрицательности производной функции Ляпунова в силу динамики системы сформулировано в терминах разрешимости линейного матричного неравенства (LMI). Для наилучшего выбора параметров функции Ляпунова в работе рассмотрена оптимизационная задача полуопределенного программирования (SDP). Представлены численные результаты.

Ключевые слова: стабилизация робота, криволинейные пути, неровная поверхность, область притяжения, метод линеаризация обратной связью.

1. Введение

Использование областей притяжения в системах автоматического управления колесными роботами представлено в работах [1–3] в качестве помощи операторам. С другой стороны, концепция автономных роботов сегодня активно развивается. Концепция автономии вообще исключает присутствие людей. Поэтому поведение роботов должно быть очень предсказуемым. Существует множество потенциальных областей для автономных роботизированных операций. Например, небольшие колесные роботы используются для точного земледелия, стрижки газонов на полях для гольфа и так далее. Общая задача для этих областей состоит в том, чтобы сделать поведение робота надеж-

[1] *Алексей Анатольевич Генералов, к.т.н.* (generalov@frtk.ru).

ным и полностью предсказуемым, включая безопасную эксплуатацию.

Можно предположить, что робот сначала доставляется в окрестности рабочей площадки и оставляется в произвольном положении вблизи начала целевого пути. Цель автономного управления состоит в том, чтобы привести робота к желаемому началу пути и стабилизировать движение целевой точки вдоль него. Кроме того, следует убедиться, что алгоритм управления не приведет к потере стабильности системы. Это означает, что робот должен попасть в область притяжения динамической системы, замкнутой синтезированным законом управления, гарантируя тем самым асимптотическую устойчивость. Кроме того, начиная движение достаточно близко к целевому пути, в процессе движения робот может претерпевать большие колебания, отклоняясь достаточно далеко от пути, даже если замкнутая система устойчива. Таким образом, оценка области притяжения должна быть инвариантной для замкнутой системы и удовлетворять разумным геометрическим ограничениям.

Специфика работы автономных роботов для сельского хозяйства состоит в последовательном повторении однотипных действий по обработке поля в процессе движения по заранее спланированным путям с применением автоматического управления рабочим инструментом. При этом поле может иметь произвольную форму рельефа. Отдельная задача состоит в оптимальном покрытии неровных полей, определенных сложной поверхностью в трехмерном пространстве с криволинейной границей. Результатом решения задачи оптимального покрытия является набор сегментов пути на поверхности поля с учетом кинематических ограничений для конкретного робота. Затем решаются задачи планирования пути и составления расписания объезда поля. Один из подходов состоит в построении набора контрольных точек, через которые затем проводится сплайн [3].

После того как пути построены, требуется решить задачу следования по криволинейным путям с высокой точностью. В точном земледелии требуется сантиметровая точность позиционирования рабочих инструментов. Для синтеза алгоритмов стабилизации движения колесного робота удобно использовать метод линеаризации обратной связью [1, 2]. Кинематика колесного робота описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Синтезируется такой нелинейный контроллер, который превращает замкнутую управляемую систему в линейную систему с заранее заданным показателем экспоненциальной устойчивости. Наличие ограничений на управление (угол поворота передних колес) может приводить к существенным переходным процессам в замкнутой системе автоматического управления, построенной с использованием метода линеаризации обратной связью [1]. Актуальной представляется задача оценки области притяжения в координатах «боковое отклонение – угловое отклонение» [2, 4].

2. Основная часть

2.1. СИНТЕЗ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

Для синтеза закона управления требуется описание кинематической схемы робота в виде системы дифференциальных уравнений и формулировка цели управления в виде алгебраического соотношения (например, равенство нулю бокового и углового отклонения от требуемого пути). Удобно использовать какой-нибудь из известных методов синтеза управления нелинейными системами, например, метод линеаризации обратной связью [1, 2].

Пусть $X \in R^3$ – это позиция целевой точки робота в WGS-84, C – матрица поворота из связанной с роботом системы координат (body frame, или BF) в WGS-84. Начало связанной системы координат лежит в рабочей точке. Первая ось BF направлена по центральной линии платформы вперед, вторая лежит в плоскости платформы и направлена вправо ортогонально первой. Третья ось направлена вниз ортогонально первым двум, дополняя их до правой тройки. Векторы считаются столбцами и символ T обозначает транспонирование. Пусть целевая точка лежит на середине задней оси. Вектор скорости целевой точки в BF и WGS-84 имеет вид (если индекс опущен, то вектор относится к WGS-84):

$$(1)\quad V_{BF} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = CV_{BF},$$

где v – это абсолютная величина линейной скорости целевой точки. Пусть $e = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Тогда уравнения движения имеют вид

$$(2)\quad \dot{X} = vCe, \qquad \dot{C} = C\Omega,$$

где

$$(3)\quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \omega^{\times}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

ω – это вектор угловой скорости, измеренный гироскопом, закрепленным на платформе, и выраженный в BF. Третья компонента ω_3 также выражается через линейную скорость v и мгновенную кривизну u траектории, описываемой целевой точкой в плоскости, касательной к поверхности поля и совпадающей с плоскостью платформы:

$$(4)\quad \omega_3 = vu, \quad u = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{H}.$$

Здесь α – угол поворота передних колёс, H – длина колёсной базы робота.

Предполагается, что движение робота происходит без проскальзывания вдоль криволинейного пути, спланированного на неровной поверхности. Это упрощение имеет место, если линейные размеры робота пренебрежимо малы по сравнению с величиной, обратной к максимальной кривизне поверхности.

Предположим, что спланированный путь имеет вид $p(s)$, где s – это путевой параметр. Функция $p(s)$ считается дважды непрерывно дифференцируемой. Путевой параметр может быть безразмерным или иметь размерность длины пути, измеренного в [м] вдоль траектории. Расстояние от точки X до пути $p(s)$ определено выражением

$$(5)\quad \delta = \|\Delta\| = \sqrt{\Delta^{\mathrm{T}}\Delta}, \quad \Delta = X - p(s^*),$$

где $p(s^*)$ – это ближайшая к X точка пути, $\|\,.\,\|$ – это евклидова норма вектора. Считаем, что величина s^* определена однозначно, т.е. минимум $\min_s \|X - p(s)\|$ достигается в единственной точке. Обозначим $p'(s) = \frac{d}{ds} p(s),\ p''(s) = \frac{d^2}{ds^2} p(s)$. Тогда величина s^* определяется решением уравнения

(6) $\Delta^{\mathrm{T}} p'(s) = (X - p(s))^{\mathrm{T}} p'(s) = 0$.

Заметим, что $C^{\mathrm{T}}\Delta$ – это боковое отклонение Δ, выраженное в BF. При этом третья компонента этого вектора равна 0, поскольку вектор Δ лежит в плоскости, касательной к поверхности:

(7) $$C^{\mathrm{T}}\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{BF,1} \\ \Delta_{BF,2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введем новую независимую переменную ξ – длина пути, пройденного рабочей точкой робота, тогда $\dot{\xi} = v$. Сделаем замену переменных $z_1 = S(\Delta_{\mathrm{BF},2})\delta$, где $S(\Delta_{\mathrm{BF},2})$ – знак второй компоненты вектора бокового отклонения (7) и $z_2 = \sin\psi$, где ψ – угол между вектором скорости и касательной к целевому пути в ближайшей точке s^*). Тогда движение колесного робота по целевой траектории с кривизной $c(\xi)$ можно описать с помощью следующей системы:

(8) $$\begin{aligned} &(z_1)_\xi = z_2, \\ &(z_2)_\xi = \sqrt{1 - z_2^2}\left(\frac{c(\xi)\sqrt{1 - z_2^2}}{c(\xi) z_1 - 1} + u\right). \end{aligned}$$

Следуя схеме метода линеаризации обратной связью, выберем управление u в форме

(9) $$u^* = \frac{-\sigma - \dfrac{c(\xi)(1 - z_2^2)}{c(\xi) z_1 - 1}}{\sqrt{1 - z_2^2}},\quad \sigma = 2\lambda z_2 + \lambda^2 z_1,$$

это приводит к

(10) $(z_1)_{\xi\xi} + 2\lambda (z_1)_\xi + \lambda^2 z_1 = 0$,

обеспечивая экспоненциальное убывание с требуемой скоростью $e^{-\lambda\xi}$ компонент вектора $z = (z_1, z_2)^{\mathrm{T}}$.

Однако в силу (4) управление u ограничено величиной $\bar{u}$, имея в виду ограниченность угла поворота передних колес α. Определим операцию насыщения выражением

$$(11)\ \mathrm{sat}_{\bar{u}}(u)=\begin{cases} \bar{u} & \text{for } u > \bar{u}, \\ u & \text{for } |u| < \bar{u}, \\ -\bar{u} & \text{for } u < -\bar{u}. \end{cases}$$

Тогда с учетом ограничений на управление

$$(12)\ u = \mathrm{sat}_{\bar{u}}(u^*).$$

Управление в виде (9) обеспечивает экспоненциальное убывание вектора z, однако дополнительное ограничение (12) может разрушить это свойство. Далее рассматривается задача оценки области притяжения, гарантирующей заданную экспоненциальную скорость сходимости.

2.2. ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ

Наличие ограничений на управление, т.е. замена управления (9) на (12) приводит к тому, что траектории системы (8), замкнутой управлением (12), перестает удовлетворять линейному дифференциальному уравнению (10). Замкнутая система становится нелинейной в силу нелинейности соотношения (12).

Для построения оценок областей притяжения нелинейных динамических систем обычно используются квадратичные функции Ляпунова в виде $V(z) = z^{\mathrm{T}}Pz$ [1]. Возможно использование других видов функций Ляпунова, например, Лурье – Постникова [2]. С помощью функции Ляпунова оценка области притяжения строится как

$$(13)\ \Omega(P) = \{z : V(z) \le 1\},$$

при условии, что производная по времени в силу динамики системы отрицательна $\dot{V} < 0$ (см. [4]). Эта область инвариантна и гарантирует притяжение к положению равновесия $z = 0$, отвечающему движению вдоль пути с нулевым боковым и угловым отклонением.

Следуя подходу абсолютной устойчивости [4], рассматриваемая нелинейная система (8) погружается в класс линейных нестационарных систем

$$(z_1)_\xi = z_2,\quad (z_2)_\xi = -\beta(\xi)\sigma, \tag{14}$$

где $\beta_0 \le \beta(\xi) \le 1$ – функция, зависящая от независимой переменной, а параметр β_0 оценивается из условия вписывания нелинейной функции в правой части второго уравнения системы (8) в сектор $-\sigma_0 \le \sigma \le \sigma_0$. Функция $\beta(\xi)$ должна удовлетворять условиям существования абсолютно непрерывного решения системы (14). Если система (14) обладает свойством

$$\frac{dV(z(\xi))}{d\xi} + 2\mu V(z(\xi)) \le 0,\ \ \xi \ge 0 \tag{15}$$

для всех функций $\beta(\xi)$ из сектора, то свойство (15) также выполняется вдоль траекторий системы (8), что гарантирует принадлежность траекторий системы (8) инвариантной области.

3. Оптимизационная постановка задачи и численный пример

Итак, для данной системы с $\bar{u} > 0$, $\bar{c} = \sup|c(\xi)| > 0$ и $\lambda > 0$, $0 < \mu \le \lambda$, необходимо найти положительно определенную матрицу P, для которой объем эллипсоида $\Omega(P)$ максимален. При этом эллипсоид должен удовлетворять геометрическим ограничениям $\Omega(P) \subseteq \Pi(\alpha_1, \alpha_2)$, например, вписывание в полосу, где $\Pi(\alpha_1, \alpha_2) = \{z : -\alpha_1 \le z_1 \le \alpha_1, -\alpha_2 \le z_2 \le \alpha_2\}$. Это требование можно сформулировать в виде задачи полуопределенного программирования (SDP) следующим образом:

$$\min(tr(P)) \tag{16}$$

$$PA_1 + A_1^{\mathrm{T}}P + 2\mu P \le 0,\quad PA_\beta + A_\beta^{\mathrm{T}}P + 2\mu P \le 0, \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} P & d \\ d^{\mathrm{T}} & \sigma_0^2 \end{pmatrix} \succ 0, \tag{18}$$

$$(19)\quad P \succeq \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ P \succeq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2^2} \end{bmatrix}.$$

Здесь $d = (\lambda^2, \lambda)^{\mathrm{T}}$ и $A_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta\lambda^2 & -2\beta\lambda \end{bmatrix}$.

По мере уменьшения β и увеличения σ_0 для заданных α_1 и α_2 проверяется разрешимость системы (16)–(19).

На рис. 1 показано поведение системы (8) на фазовой плоскости вместе с оценкой области притяжения. Красный эллипс обозначает оценку области притяжения.

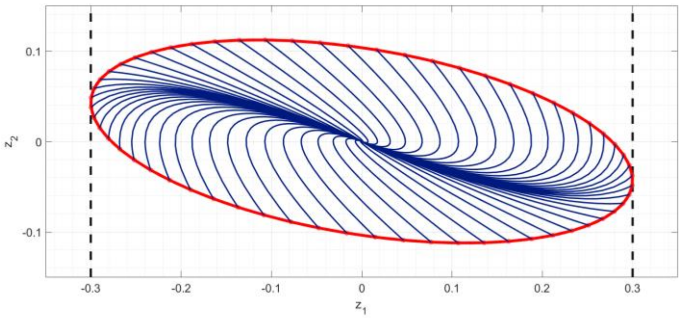

Рис. 1. Оценка области притяжения в пространстве «боковое отклонение – угловое отклонение»

Синими линиями показаны траектории системы (8), замкнутой управлением (12) для начальных условий от границы эллипса и для кривизны, взятой из ранее запланированного пути. Были заданы параметры $\bar{u} = 0{,}5$, $\bar{c} = 0{,}33$. Оценка области притяжения может быть вписана в полосу определенной ширины по любой из переменных пространства состояний системы. Здесь величины $\sigma_0 = 0{,}11$, $\beta = 0{,}29$ были получены для $\alpha_1 = 0{,}3$, $\alpha_2 = 0{,}97$ и $\mu = 0{,}1\ \lambda$, где $\lambda = 0{,}5$.

Как видно, полученная область инвариантна, т.е. если движение начато внутри области, то оно будет продолжаться внутри области. Инвариантная область является одновременно областью притяжения состояния равновесия, отвечающего рабочему режиму робота.

4. Заключение

Для динамической системы, описывающей движение автономных колесных роботов по неровной поверхности вдоль криволинейного пути, выведен закон управления и гарантирована заданная экспоненциальная скорость сходимости. Сформулирована оптимизационная постановка задачи для оценки области притяжения. Поскольку область притяжения вписана в некоторую область, удовлетворяющую геометрическим ограничениям, то в процессе движения эти ограничения не будут нарушены, несмотря на наличие переходных процессов. Эта конструкция оказывается важной при переходе от автоматических систем, не исключающих присутствие оператора в кабине, к полностью автономным как один из способов обеспечения безопасности и предсказуемости поведения автономного робота.

Литература

1. PESTEREV A., RAPOPORT L., MOROZOV Y. *Control of a wheeled robot following a curvilinear path* // Proc. of the 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC-2008). – 2008. – P. 1–7.
2. RAPOPORT L., GENERALOV A. *Lurie systems stability approach for attraction domain estimation in the wheeled robot control problem* // Optimization and Applications. OPTIMA 2020. LNCS-2020. – №12422. – P. 224–238.
3. RAPOPORT L., GENERALOV A., SHAVIN M., TORMAGOV T. *Navigation and Control Problems in Precision Farming* // 28th Saint Petersburg Int. Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS-2021). – 2021. – P. 1–8.
4. RAPOPORT L., MOROZOV Y. *Estimation of attraction domains in wheeled robot control using absolute stability*

approach // 17th IFAC World Congress. – 2008. – No. 41. – P. 5903–5908. – DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117906090062.

ATTRACTION DOMAIN ESTIMATION IN THE AUTONOMOUS WHEELED ROBOTS CONTROL PROBLEM

Alexey Generalov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, PhD, (generalov@frtk.ru).

Abstract: The problem of motion control of autonomous wheeled robots is considered. It is assumed that the robot moves without lateral slippage along a curvilinear path planned on an uneven surface. The control law synthesis is synthesized by the feedback linearization method. The paper is devoted to the construction of the invariant attraction domain estimate in the "lateral deviation-angular deviation" space, taking into account control constraints. It is assumed that the Lyapunov function is a quadratic form. The negativity condition for the derivative of the Lyapunov function with respect to the system's dynamics is formulated in terms of the solvability of the linear matrix inequality (LMI). For the best choice of the Lyapunov function parameters, the optimization problem of semi-definite programming (SDP) is considered. Numerical results are presented.

Keywords: robot stabilization, curvilinear pathes, uneven surface, attraction domain, feedback linearization.

УДК 517.977
ББК 22.161.8