ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ[1]

Лазарев А. А.[2], Лемтюжникова Д. В.[3], Тюняткин А. А.[4]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Рассматривается задача минимизации максимального временного смещения. Вводится способ преобразования исходного примера задачи при помощи домножения некоторых его параметров на константу. Задаётся новая целевая функция, аргумент которой – константа, задающая некоторый производный пример. Исследуются свойства этой функции, и на их основе строится интерполяционный подход – метод, позволяющий оценить значение целевой функции исходного примера, а также получить верхнюю и нижнюю границу этой целевой функции. Представлен алгоритм интерполяционного подхода, позволяющий аппроксимировать значение целевой функции. Кроме того, вводится пространство примеров размерности n и указываются некоторые свойства геометрии производных примеров в этом пространстве.

Ключевые слова: дискретная математика, теория расписаний, задача минимизации максимального временного смещения, интерполяция, аппроксимация целевой функции.

1. Введение

1.1. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОДХОД

Подавляющее большинство задач теории расписаний NP-трудны [5]. Для решения каждой такой задачи необходим отдельный алгоритм: аппроксимационный или полиномиальный в среднем. Производительность таких алгоритмов сильно зависит от входных данных [1, 4, 6].

Предлагаемый интерполяционный подход [7] – метод оценки значения целевой функции в задачах дискретной математики. Идея подхода рассматривается на примере задачи минимизации максимального временного смещения [1, 4].

---

[1] *Данное исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ №20-58-S52006.*

[2] *Александр Алексеевич Лазарев, д.ф.-м.н., профессор* (jobmath @mail.ru).
[3] *Дарья Владимировна Лемтюжникова, к.ф.-м.н., доцент* (darabbt@gmail.com).
[4] *Андрей Александрович Тюняткин, студент* (a@tuniatk.in).

1.2. ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ МАКСИМАЛЬНОГО ВРЕМЕННОГО СМЕЩЕНИЯ

Задача ставится следующим образом. Дано множество требований N. Каждое требование j характеризуется тремя параметрами: r_j, p_j, d_j, где r_j – момент поступления, т.е. время, ранее которого данное требование не может поступить на обслуживание; p_j – продолжительность обслуживания; d_j – директивный срок.

Вводится функция $L_j(\pi) = C_j(\pi) – d_j$, где $C_j(\pi)$ – момент завершения обслуживания требования при заданном расписании π.

Целевая функция рассматриваемой задачи – $L_{max}(\pi) = \max_{j\in N} L_j(\pi)$. Необходимо найти такое расписание π^*, на котором достигается минимум функции $L_{max}(\pi)$. Расписание π^* называется оптимальным.

2. Пространство примеров размерности n

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Каждый пример рассматриваемой задачи, состоящий из n требований, мы представляем в виде точки в $3n$-мерном пространстве примеров размерности n. Координаты этой точки: $(r_1, r_2, \ldots, r_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Для удобства будем записывать координаты каждого такого примера в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \\ d_1 & d_2 & \ldots & d_n \end{pmatrix}.$$

2.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИМЕРОВ

Определение 1. Преобразование $r' = \alpha r$ (где α – произвольное действительное неотрицательное число) – преобразование, которое ставит в соответствие исходному примеру

$$A=\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix} \text{ производный пример } A'=\begin{pmatrix} \alpha r_1 & \alpha r_2 & \dots & \alpha r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяются преобразования параметров p и d. Так же можно определить и комбинации этих преобразований. Отметим, однако, что производные примеры, полученные в результате комбинации всех трёх преобразований с равными коэффициентами, являются изоморфными [6].

2.3. ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИМЕРОВ

Для лучшего понимания геометрии введённых преобразований в пространстве примеров размерности n представим следующие теоремы. Эти теоремы описывают расположение производных примеров относительно исходного примера в этом пространстве.

Теорема 1. *Все производные примеры, полученные в результате преобразования r, лежат на одной прямой в $3n$-мерном пространстве примеров. На той же прямой содержится и исходный пример.*

Теорема 2. *Три точки A, B, C, полученные в результате комбинации преобразований $r' = \alpha r$, $p' = \beta p$, $d' = \gamma d$ с различными коэффициентами, лежат на одной прямой в $3n$-мерном пространстве примеров, если выполняется следующее неравенство на коэффициенты:*

$$\frac{\alpha^C-\alpha^A}{\alpha^B-\alpha^A}=\frac{\beta^C-\beta^A}{\beta^B-\beta^A}=\frac{\gamma^C-\gamma^A}{\gamma^B-\gamma^A}.$$

Следствие 1. Если коэффициенты, задающие производные примеры, считаются по следующему правилу:

$$\alpha_i=\alpha_0+i\cdot\Delta_\alpha, \beta_i=\beta_0+i\cdot\Delta_\beta, \gamma_i=\gamma_0+i\cdot\Delta_\gamma,$$

то все производные примеры лежат на одной прямой.

3. Преобразование $r' = \alpha r$

Определение 2. $L_{max}(\alpha)$ – функция, аргумент которой – действительный неотрицательный коэффициент, а возвращаемое значение – оптимальная величина целевой функции, полученная для производного примера.

Теорема 3. *Функция $L_{max}(\alpha)$ монотонно возрастает на своей области определения.*

Теорема 4. *Функция $L_{max}(\alpha)$ непрерывна на своей области определения.*

Гипотеза 1. Функция $L_{max}(\alpha)$ кусочно линейна на своей области определения.

Гипотеза 2. Производная $\frac{d}{d\alpha}L_{max}(\alpha)$ существует и монотонно возрастает на области определения $L_{max}(\alpha)$.

На рис. 1 представлен вид функции $L_{max}(\alpha)$, соответствующий перечисленным теоремам и гипотезам.

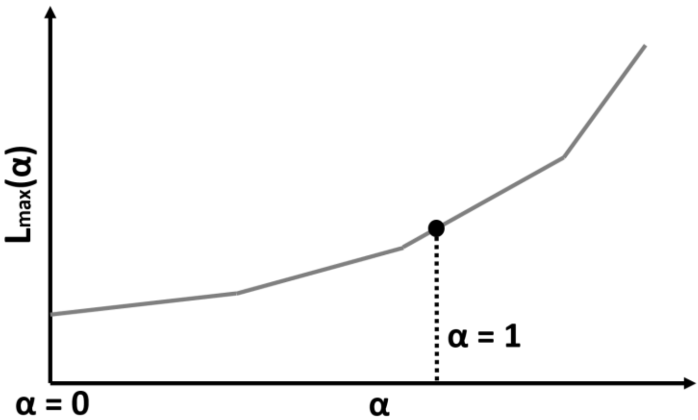

Рис. 1. Функция $L_{max}(\alpha)$

Пусть существуют некоторые полиномиальные области и точки $\alpha_* < 1 < \alpha^*$, принадлежащие этим областям. Тогда, пользуясь теоремами 3–4, возможно рассчитать нижнюю и верхнюю границы целевой функции. Способ построения этих границ приведён на рис. 2.

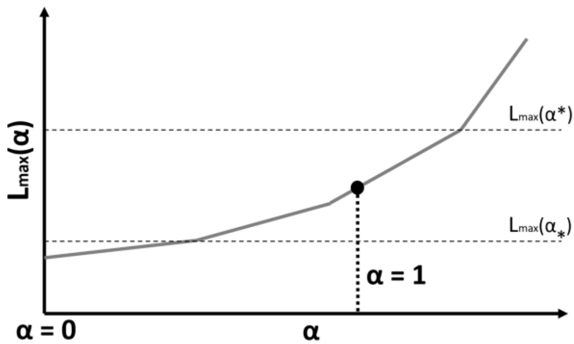

Рис. 2. Нижняя и верхняя граница целевой функции исходного примера

4. Интерполяционный подход

4.1. ИДЕЯ ПОДХОДА

Рассмотрим алгоритм решения задачи минимизации максимального временного смещения при помощи интерполяционного подхода. Для определенности будем использовать преобразование r, а также интерполяцию Лагранжа[9].

Интерполяционный полином Лагранжа задается следующей формулой:

$$L_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\prod_{i \neq k}(x - x_i)}{\prod_{j \neq k}(x - x_j)} f(x_k),$$

где x_k, $k = 1, \ldots, m$, – узлы интерполяции, значения целевой функции в которых соответственно равны $f(x_k)$.

Подставляя в эту формулу значения целевой функции в точках, выбранных узлами интерполяции, получим выражение, с помощью которого и оценивается целевая функция исходного примера. Исходному примеру, из определения преобразования r, соответствует точка $\alpha = 1$.

4.2. АЛГОРИТМ ПОДХОДА

Алгоритм интерполяционного подхода был представлен авторами в [7].

1. Определить множество m численных значений α_i.
2. Для каждого значения коэффициента получить i-й производный пример путем преобразования r исходного примера с коэффициентом α_i.
3. Для каждого i-го производного примера решить соответствующую задачу и вычислить значение целевой функции.
4. Зная значения целевых функций производных примеров, оценить значение целевой функции исходного примера, используя формулу интерполяции Лагранжа;

4.3. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

В качестве узлов интерполяции разумно выбрать производные примеры, решение которых возможно найти за полиномиальное время. В качестве классов таких примеров предлагается два новых полиномиально разрешимых случая: случай слабо различающихся r и случай существенно различающихся r.

Подробное описание этих случаев будет представлено авторами в следующей статье. На данном этапе ограничимся формулами, задающими полиномиально разрешимые области для обоих случаев.

Теорема 5. *Производный пример является случаем существенно различающихся r, если коэффициент α, задающий его, удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\alpha \geq \max \frac{p_i}{r_j - r_i}, i, j = 1 \ldots n, i \neq j, r_j > r_i.$$

Заметим, что предел коэффициента в данном случае не ограничен сверху.

Теорема 6. *Производный пример является случаем слабо различающихся r, если коэффициент α, задающий его, удовлетворяет следующему неравенству:*

$$0 \leq \alpha \leq \min_{i,j} \frac{p_i}{r_j - r_i}, i, j = 1 \ldots n, i \neq j, r_j > r_i$$

5. Итоги

В докладе представлен интерполяционный подход, позволяющий оценить значение целевой функции в задачах дискретной математики. Введено пространство примеров задачи и рассмотрена геометрия примером в этом пространстве. Предложен способ оценки погрешности метода.

Несмотря на то, что метод был рассмотрен на примере задачи минимизации максимального временного смещения, его возможно использовать для оценки целевой функции во многих задачах дискретной математики и, в частности, теории расписаний.

Литература

1. BRUCKER P. *Scheduling algorithms*. – Berlin: Springer, 1995.
2. JACKSON J.R. *Scheduling a production line to minimize maximum tardiness.* – Los Angeles, CA: University of California, 1955.
3. LAZAREV A.A., LEMTYUZHNIKOVA D.V., PRAVDIVETS N.A., WERNER F. *Polynomially Solvable Subcases for the Approximate Solution of Multi-machine Scheduling Problems* // Communications in Computer and Information Science (Advances in Optimization and Applications, 11th International Conference, OPTIMA-2020). – 2021. – №1340. – P. 211–223.
4. LAZAREV A.A., PRAVDIVETS N.A., WERNER F. *On the Dual and Inverse Problems of Scheduling Jobs to Minimize the Maximum Penalty* // Mathematics. – 2020. – Vol. 8, No. 7. – P. 1131.
5. LENSTRA J.K., RINNOOY KAN A.H.G., BRUCKER P. *Complexity of machine scheduling problems* // Annals of discrete mathematics. – 1977. – Vol. 1. – P. 343–362.
6. ЛАЗАРЕВ А.А. *Теория расписаний. Методы и алгоритмы.* – М.: ИПУ РАН, 2019.
7. ЛАЗАРЕВ А.А., ЛЕМТЮЖНИКОВА Д.В., ТЮНЯТКИН А.А. *Метрическая интерполяция для задачи минимизации*

максимального временного смещения для одного прибора // Автоматика и телемеханика. – 2021. – №10. – С. 93–109.
8. РОЗЕНФЕЛЬД Б.А. *Многомерные пространства.* – М.: Рипол Классик, 2013.
9. САМАРСКИЙ А.А., ГУЛИН А.В. *Численные методы: Учеб. пособие для вузов.* – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.

INTERPOLATION IN SCHEDULING THEORY PROBLEMS

Alexander Lazarev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (jobmath@mail.ru).
Daria Lemtyuzhnikova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., assistant professor (darabbt@gmail.com).
Andrey Tyunyatkin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, student (a@tuniatk.in).

Abstract: A maximum lateness minimization problem is considered. A method for transforming the original instance of the problem by multiplying some of its parameters by a constant is introduced. A new objective function is given, the argument of which is a constant that specifies a transformed instance. The properties of this function are then studied, and an interpolation approach is constructed on their basis – this method allows to estimate the value of the objective function of the original instance, as well as obtaining the upper and lower bounds of this objective function. An algorithm of the interpolation approach is presented, which makes it possible to approximate the value of the objective function. In addition, we introduce a feature space of instances of n jobs and specify some features of the geometry of the transformed instances in this space.

Keywords: discrete mathematics, scheduling theory, maximum lateness minimization problem, interpolation, objective function approximation.

УДК 519.854.2
ББК 22.185.431