

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БПЛА МУЛЬТИРОТОРНОГО ТИПА В СРЕДЕ MATLAB

Трефилов П. М.<sup>1</sup>, Тевяшов Г. К.<sup>2</sup>  
(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Описан подход к моделированию кинематической и динамической модели БПЛА мультироторного типа в среде Matlab. Представленная модель позволит учитывать отсутствие симметрии между винтами БПЛА, а также разность масс двигателей и диаметр винтов. Модель учитывает возможности внешних возмущений, таких как ветер, изменение силы тяжести двигателей с учётом набора высоты. Подобный подход может обеспечить моделирование сценариев применения БПЛА с использованием внешних источников ориентации и навигации. Модель системы автоматического управления позволит БПЛА отслеживать текущее местоположение относительно текущего момента времени, а также позволит корректировать его с учетом задержки передачи информации. Представленный подход позволит использовать в качестве источников ориентации такие системы, как инерциальная система навигации, глобальная навигационная система и другие источники ориентации и навигации БПЛА.*

Ключевые слова: БПЛА, динамическая модель, кинематическая модель.

### 1. Введение

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) активно используются в современном мире. Области их внедрения расширяются с каждым днем и уже затрагивают такие направления, как сельское хозяйство, строительство и другие промышленные сферы. Различные области применения порождают все более сложные конструкции летательных аппаратов. Например, БПЛА могут отличаться по массе, размерам, подъёмной силе, скорости, максимальным углам отклонения и большому числу других параметров. Для того чтобы разработать БПЛА под конкретный ряд задач, возможно произвести математическое моделирование параметров БПЛА, что позволит сделать вывод о его пригодности.

---

<sup>1</sup> Петр Михайлович Трефилов, н.с. (petertf@gmail.com).

<sup>2</sup> Глеб Константинович Тевяшов, м.н.с. (glebtevyashov96@yandex.ru).

В работе описана математическая модель управляемого полета квадрокоптера в заранее заданных сценариях применения, позволяющая проводить исследования структуры автопилота.

## 2. Нелинейная динамическая модель БПЛА

На тему моделирования БПЛА типа квадрокоптер написано большое число работ, например, [1–3]. Однако в представленных работах не учитывается размер винта или размер БПЛА должен быть симметричный.

Из рассмотренных моделей за основу была взята модель, описанная в [4]. Схематическая модель представлена в виде четырех двигателей  $D_i$ , расположенных на концах соответствующих осей рамы  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Схематическая модель представлена на рис. 1.

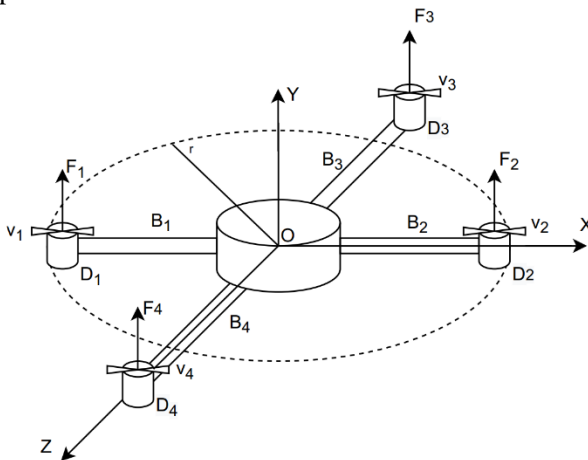


Рис. 1. Конструктивная схема БЛА типа квадрокоптер

Пространственное положение квадрокоптера определяется тремя углами Эйлера –  $\vartheta$ ,  $\gamma$ ,  $\Psi$  (тангаж, крен, курс). Пространственное положение центра масс квадрокоптера задается, соответственно, тремя линейными координатами –  $X_\Gamma$ ,  $Y_\Gamma$ ,  $Z_\Gamma$ . Подъемные силы каждого из двигателей обозначим как  $\vec{F}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Для удобства последующего описания математических выражений движения квадрокоптера введем следующие обозначения:

- Вектор положения квадрокоптера:  $\vec{X} = (X_\Gamma \ Y_\Gamma \ Z_\Gamma)^T$ .
- Вектор линейной относительной скорости квадрокоптера:  $\vec{V} = (V_{X_\Gamma} \ V_{Y_\Gamma} \ V_{Z_\Gamma})^T$ .
- Вектор угловой ориентации квадрокоптера:  $\vec{\Theta} = (\vartheta \ \gamma \ \Psi)^T$ .
- Вектор угловой скорости квадрокоптера:  $\vec{\mathcal{W}} = (w_x \ w_y \ w_z)^T$ .

На основе второго закона Ньютона векторное уравнение для абсолютного ускорения объекта имеет следующий вид:

$$(1) \quad m(\vec{A}_{\text{абс.}}) = D_{xyz}^{X_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma} \vec{U} + \vec{F}_a - m\vec{G};$$

где

$$\vec{A}_{\text{абс.}} = \vec{A}_{\text{относительное}} + \vec{A}_{\text{кориолис}} + \vec{A}_{\text{переносное}},$$

$\vec{A}_{\text{относительное}} = \frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{\omega}_{X_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma} \times \vec{V}$  – ускорение, вызванное движением относительно Земли;  $\vec{\omega}_{X_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma}$  – относительная угловая скорость, т.е. угловая скорость поворота вследствие движения с относительной линейной скоростью  $\vec{V}$ :

$$(2) \quad \vec{\omega}_{X_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma} = \begin{pmatrix} \frac{V_{Z_\Gamma}}{R_1} \\ \frac{V_{Z_\Gamma}}{R_2} \operatorname{tg} \varphi \\ -\frac{V_{X_\Gamma}}{R_1} \end{pmatrix};$$

$\varphi$  – географическая широта местоположения БЛА;  $R_1, R_2$  – радиусы первого и второго главных сечений земного эллипсоида в точке местоположения БЛА:

$$(3) \quad \begin{cases} R_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} + h; \\ R_2 = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}} + h; \end{cases}$$

$a$  – большая полуось земного эллипсоида,  $a = 6378245$  м;  
 $e^2$  – квадрат эксцентриситета эллипсоида,  $e^2 = 0,0066934216$ ;  
 $h$  – высота местоположения БЛА над уровнем моря;



$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} u \cos \varphi \\ u \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix};$$

$\vec{U}$  – вектор подъемной силы:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$\vec{F}_a$  – вектор аэродинамической силы:

$$\vec{F}_a = \frac{1}{2} \rho C S \begin{pmatrix} -V_{X\Gamma} |V_{X\Gamma}| \\ -V_{Y\Gamma} |V_{Y\Gamma}| \\ -V_{Z\Gamma} |V_{Z\Gamma}| \end{pmatrix};$$

$\rho$  – плотность окружающей среды;  $C$  – коэффициент сопротивления окружающей среды;  $S$  – площадь окружности, описываемой радиусом винта;  $m$  – масса БЛА.

Векторные уравнения для линейной относительной скорости и местоположения квадрокоптера имеют вид

$$(5) \begin{cases} \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{V}; \\ \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{A}_{\text{каж.}} - \vec{\omega}_{X\Gamma Y\Gamma Z\Gamma} \times \vec{V} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \vec{G}; \end{cases}$$

$\vec{A}_{\text{каж.}} = \vec{A}_{\text{абс.}} + \vec{G}$  – кажущееся ускорение – сумма абсолютного и гравитационного ускорения.

Вычисление векторные уравнения для линейной относительной скорости и местоположения квадрокоптера представлены на рис. 3.

Пространственное угловое движение БЛА относительно центра масс описывается следующим векторным уравнением:

$$(6) J \frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{M} - \vec{W} \times (J\vec{W});$$

где  $\vec{W} = \vec{W} + D_{xyz}^{X\Gamma Y\Gamma Z\Gamma T} \vec{\Omega}$ ,  $J$  – тензор инерции БЛА:

$$J = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}; J_x, J_y, J_z - \text{моменты инерции относительно}$$

соответствующих осей;  $\vec{M}$  – вектор действующих моментов на БЛА в процессе полета:

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{x \text{ управл.}} + M_{x \text{ ротор}} + M_{x \text{ винт}} \\ M_{y \text{ управл.}} + M_{y \text{ ротор}} + M_{y \text{ винт}} \\ M_{z \text{ управл.}} + M_{z \text{ ротор}} + M_{z \text{ винт}} \end{pmatrix}.$$

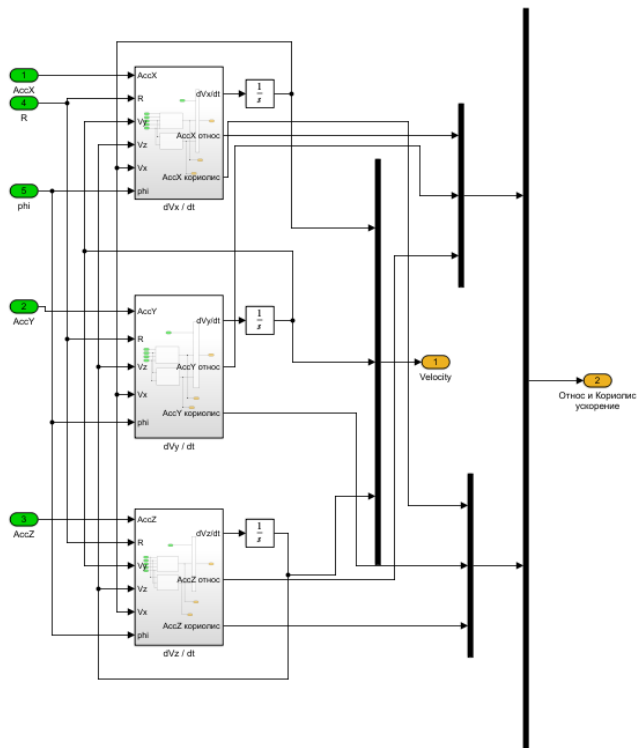


Рис. 3. Расчет скоростей БПЛА в географической системе координат

Моменты управляемых сил рассчитываются по следующим формулам:

$$(7) \begin{cases} M_{x \text{ управл.}} = \frac{l}{J_x} U_2; \\ M_{y \text{ управл.}} = \frac{l}{J_y} U_4; \\ M_{z \text{ управл.}} = \frac{l}{J_z} U_3; \end{cases}$$

где  $l$  – расстояние от центра масс квадрокоптера до ротора,  $U_2, U_3, U_4$  – управляющие сигналы.

Гироскопические моменты ротора и винтов имеют следующий вид:

$$(8) \quad \begin{cases} M_{x \text{ ротор}} = J_{\text{ротор}} \omega_z (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4); \\ M_{y \text{ ротор}} = 0; \\ M_{z \text{ ротор}} = J_{\text{ротор}} \omega_x (-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4); \end{cases}$$

где  $J_{\text{ротор}}$  – осевой момент инерции вала ротора двигателя,  $\Omega_i$  – скорости вращения винтов,  $i = 1, \dots, 4$ .

$$(9) \quad \begin{cases} M_{x \text{ винт}} = J_{\text{винт}} \omega_z (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4); \\ M_{y \text{ винт}} = 0; \\ M_{z \text{ винт}} = J_{\text{винт}} \omega_x (-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4); \end{cases}$$

где  $J_{\text{винт}}$  – осевой момент инерции винта.

Скорости вращения винтов можно найти, используя следующее выражение:

$$(10) \quad \begin{pmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -b & 0 & b \\ -b & 0 & b & 0 \\ -d & d & -d & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix};$$

где  $b$  – коэффициент тяги;  $d$  – коэффициент сопротивления винта.

Углы ориентации БЛА можно получить, решив уравнение Пуассона в кватернионной форме:

$$(11) \quad \frac{d\vec{\Lambda}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{\Lambda} \circ \vec{W};$$

где  $\vec{\Lambda}$  – кватернион, соответствующей матрице направляющих косинусов:

$$\vec{\Lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3);$$

$\vec{W}$  – кватернион, составленный из проекций угловых скоростей:

$$\vec{W} = (0, w_x, w_y, w_z).$$

Исходное уравнение (12) распадается на 4 скалярных уравнения:

$$(12) \begin{cases} \dot{\lambda}_0 = \frac{1}{2}(-\lambda_1 w_x - \lambda_2 w_y - \lambda_3 w_z); \\ \dot{\lambda}_1 = \frac{1}{2}(\lambda_0 w_x - \lambda_3 w_y + \lambda_2 w_z); \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{2}(\lambda_3 w_x + \lambda_0 w_y - \lambda_1 w_z); \\ \dot{\lambda}_3 = \frac{1}{2}(-\lambda_2 w_x + \lambda_1 w_y + \lambda_0 w_z). \end{cases}$$

Углы ориентации вычисляются по следующим формулам:

$$(13) \begin{cases} \vartheta = \arcsin(2\lambda_1^* \lambda_2^* + 2\lambda_0^* \lambda_3^*); \\ \gamma = \operatorname{atan} 2 \left( \frac{2\lambda_0^* \lambda_1^* - 2\lambda_2^* \lambda_3^*}{2\lambda_2^{2*} + 2\lambda_0^{2*} - 1} \right); \\ \psi = \operatorname{atan} 2 \left( \frac{2\lambda_0^* \lambda_2^* - 2\lambda_1^* \lambda_3^*}{2\lambda_2^{2*} + 2\lambda_0^{2*} - 1} \right); \end{cases}$$

где

$$\vec{\lambda}^* = \frac{\vec{\lambda}}{\|\vec{\lambda}\|}, \|\vec{\lambda}\| - \text{норма кватерниона.}$$

Решение системы уравнений 11–13 в среде Matlab представлено на рис. 4.

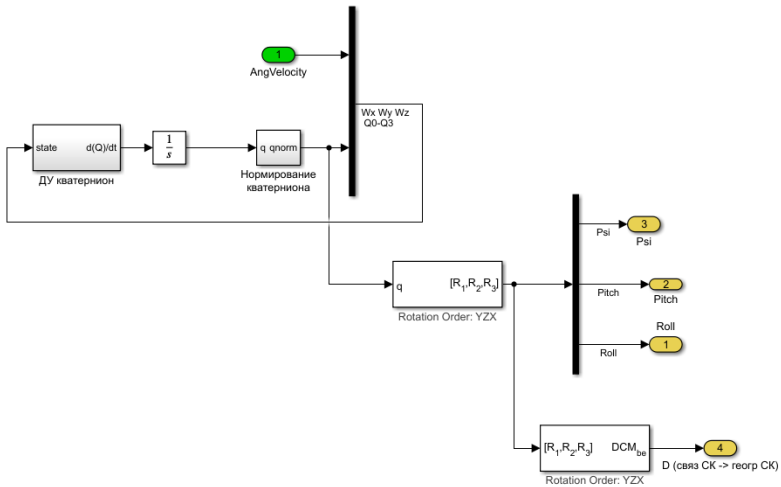


Рис. 4. Решение уравнений Пуассона в среде Matlab



Таким образом, полная математическая модель, описывающая пространственную и угловую динамику БЛА типа квадрокоптер, состоит из 13 дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_\Gamma = V_{X_\Gamma}; \\ \dot{Y}_\Gamma = V_{Y_\Gamma}; \\ \dot{Z}_\Gamma = V_{Z_\Gamma}; \\ \dot{V}_{X_\Gamma} = \frac{1}{m} \left\{ U_1 (\sin\gamma \sin\Psi - \cos\gamma \cos\Psi \sin\vartheta) - \frac{1}{2} \rho C S V_{X_\Gamma} |V_{X_\Gamma}| \right\} - \\ - \frac{V_{Z_\Gamma}^2}{R_2} \operatorname{tg}\varphi - \frac{V_{X_\Gamma} V_{Y_\Gamma}}{R_1} - 2V_{Z_\Gamma} u \sin\varphi; \\ \dot{V}_{Y_\Gamma} = \frac{1}{m} \left\{ U_1 (\cos\gamma \cos\vartheta) - \frac{1}{2} \rho C S V_{Y_\Gamma} |V_{Y_\Gamma}| \right\} + \\ + \frac{V_{Z_\Gamma}^2}{R_1} - \frac{V_{X_\Gamma}^2}{R_2} \operatorname{tg}\varphi + 2V_{Z_\Gamma} u \cos\varphi - g; \\ \dot{V}_{Z_\Gamma} = \frac{1}{m} \left\{ U_1 (\cos\gamma \sin\Psi \sin\vartheta + \sin\gamma \cos\Psi) - \frac{1}{2} \rho C S V_{Z_\Gamma} |V_{Z_\Gamma}| \right\} - \\ - \frac{V_{Z_\Gamma} V_{Y_\Gamma}}{R_1} + \frac{V_{X_\Gamma} V_{Z_\Gamma}}{R_2} \operatorname{tg}\varphi - 2u (V_{Y_\Gamma} \cos\varphi - V_{X_\Gamma} \sin\varphi); \\ \dot{w}_x = \frac{1}{J_x} \{ lU_2 + (J_{\text{ротор}} + J_{\text{винт}}) w_z (\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) + w_y w_z (J_z - J_y) \}; \\ \dot{w}_y = \frac{1}{J_y} \{ lU_4 + w_y w_x (J_y - J_x) \}; \\ \dot{w}_z = \frac{1}{J_z} \{ lU_3 + (J_{\text{ротор}} + J_{\text{винт}}) w_x (-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4) + w_x w_z (J_x - J_z) \}; \\ \dot{\lambda}_0 = \frac{1}{2} (-\lambda_1 w_x - \lambda_2 w_y - \lambda_3 w_z); \\ \dot{\lambda}_1 = \frac{1}{2} (\lambda_0 w_x - \lambda_3 w_y + \lambda_2 w_z); \\ \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{2} (\lambda_3 w_x + \lambda_0 w_y - \lambda_1 w_z); \\ \dot{\lambda}_3 = \frac{1}{2} (-\lambda_2 w_x + \lambda_1 w_y + \lambda_0 w_z). \end{array} \right.$$

Общая блок-схема решения системы уравнений 14 в среде Matlab представлена на рис. 5.

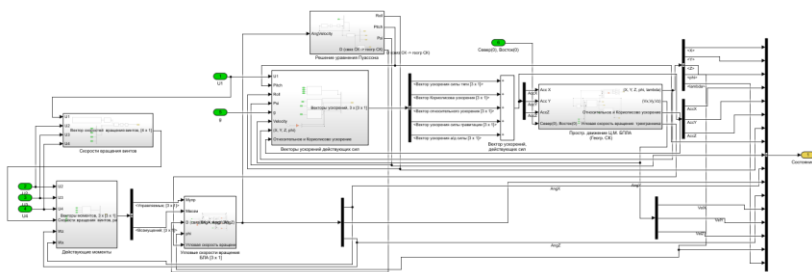


Рис. 5. Общее изображение нелинейной динамики БПЛА

### 3. Расчет параметров момента инерции для БПЛА

Представим моменты инерции БПЛА следующим образом:

$$(15) \begin{cases} J_x = J_z = \frac{1}{2} m_c l_c^2 + 2m_e l^2; \\ J_y = \frac{1}{2} m_c l_c^2 + 4m_e l^2, \end{cases}$$

где  $m_c$  – масса центра квадрокоптера,  $l_c$  – радиус центра шара, которым описывается центр квадрокоптера,  $m_e$  – масса двигателя.

Момент инерции ротора двигателя:

$$(16) J_{\text{ротор}} = \frac{1}{2} m_e r^2;$$

где  $m_e$  – масса ротора,  $r$  – его радиус.

Общая масса квадрокоптера представлена в виде

$$(17) M = m_c + 4m_e + 4m_r;$$

где  $m_r$  – масса винта.

Момент инерции винта представлен в виде

$$(18) J_{\text{винт}} = m_r R \left( \frac{T^2}{4\pi^2} g + R \right);$$

где  $T$  – период колебания винта,  $R$  – радиус винта.

Расчет коэффициента тяги:

$$(19) b = \frac{Mg}{4\Omega_0^2};$$

где  $\Omega_0$  – скорость вращения винтов, при которых происходит зависание квадрокоптера.

#### 4. Результаты и выводы

В работе рассмотрен подход к построению нелинейной кинематическо-динамической модели БПЛА типа квадрокоптер. Работа позволит производить моделирование различных динамических свойств. В дальнейшем планируется доработка модели в области формирования планировщика траектории и алгоритмов навигации для проведения качественной оценки выполнения сценариев применения.

#### Литература

1. КРАСОВСКИЙ А.Н. *Математическая модель полёта дрона-квадрокоптера и способ гарантированной посадки его в «гнездо»* // Актуальные исследования. – 2021. – №14(41). – С. 6–10. – URL: <https://apni.ru/article/2164-matematicheskaya-model-polyota-drona-kvadroko> (дата обращения: 14.08.2021).
2. ОГОЛЬЦОВ И.И., РОЖНИН Н.Б., ШЕВАЛЬ В.В. *Разработка математической модели пространственного полета квадрокоптера* // Труды МАИ. – Вып. 83. – С. 1–7.
3. ПЕТРОВ В.Ф., БАРУНИН А.А., ТЕРЕНТЬЕВ А.И. *Модель системы автоматического управления беспилотным летательным аппаратом* // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2014. – №12-2. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/model-sistemy-avtomaticheskogo-upravleniya-bespilotnym-letatelnyim-apparatom> (дата обращения: 14.08.2021).
4. ADILET TAGAY, ABYLKAIYR OMAR, MD. HAZRAT ALI *Development of control algorithm for a quadcopter* // Procedia Computer Science. – 2021. – Vol. 179. – P. 242–251. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2021.01.003>.

#### **SIMULATION OF A MATHEMATICAL MODEL OF A MULTIROTARY TYPE OF A DRONE IN MATLAB ENVIRONMENT**

**Peter Trefilov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow (Petertrfi@gmail.com).

**Gleb Tevyashov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow (glebtevyashov96@yandex.ru).

***Abstract** The article describes an approach to modeling the kinematic and dynamic model of a multirotor type UAV in the Matlab environment. The presented model will allow taking into account the lack of symmetry between the propellers of the UAV, as well as the difference in the mass of the engines and the diameter of the propellers. The model takes into account the possibility of external disturbances, such as wind, changes in the gravity of the engines, taking into account the climb. Such an approach can provide modeling of UAV application scenarios using external orientation and navigation sources. The model of the automatic control system will allow the UAV to track the current location relative to the current moment in time, and will also allow it to be adjusted taking into account the delay in transmitting information. The presented approach will allow using such systems as the inertial navigation system, the global navigation system, and other sources of orientation and navigation of UAVs as orientation sources.*

**Keywords:** UAV, kinematic model, dynamic model.

УДК 519.876.5

ББК 87.256.631.0