

## **АЛГОРИТМЫ РАСЧЁТА КОАЛИЦИОННОЙ МАНИПУЛИРУЕМОСТИ ПРОЦЕДУР АГРЕГИРОВАНИЯ**

**Иванов А. А.<sup>1</sup>**

*(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва  
НИУ Высшая школа экономики, Москва)*

*Проблема коалиционной манипулируемости заключается в том, что группа участников может намеренно сообщить неискренние предпочтения, чтобы добиться лучшего для себя результата процедуры агрегирования. В литературе известен ряд индексов манипулируемости (индекс Нитцана – Келли, индексы свободы манипулирования, индексы эффективности манипулирования), которые оценивают степень манипулируемости различных процедур агрегирования. Аналитический вывод формул для таких индексов возможен только для некоторых процедур, например, процедуры относительного большинства, однако довольно сложен для многих других. Поэтому предлагается использовать методы компьютерного моделирования для оценки индексов коалиционной манипулируемости ряда процедур агрегирования. В работе рассматриваются алгоритмы, позволяющие произвести такое моделирование методом генерации 1 миллиона случайных профилей и получить значения индексов манипулируемости.*

Ключевые слова: коалиционное манипулирование, процедуры агрегирования, голосование, манипулируемость.

### **1. Введение**

Коалиционное манипулирование – это ситуация, когда группа участников предъявляет неискренние предпочтения, чтобы достичь лучшего для себя результата процедуры агрегирования.

В работах [5] и [9] было доказано, что не существует неманипулируемой процедуры агрегирования при условии, что это недиктаторская процедура. Если невозможно найти неманипулируемую недиктаторскую процедуру агрегирования, то возникает

---

<sup>1</sup> Александр Александрович Иванов, м.н.с. (ivanovalexalex@gmail.com).

вопрос: возможно ли найти наименее манипулируемую процедуру агрегирования?

В ряде работ данная проблема была изучена для различных случаев [1, 2, 3, 4, 8, 10]. Большинство работ рассматривает случай индивидуального манипулирования, т.е. ситуацию, когда ровно один участник может предъявлять неискренние предпочтения. Для некоторых правил были получены формулы, для более длинного списка правил были получены значения индексов манипулируемости с помощью компьютерного моделирования. Например, в статье [1] было рассмотрено более 20 различных процедур агрегирования.

Проблема коалиционного манипулирования также была рассмотрена в ряде статей. Однако как вывод формул, так и компьютерное моделирование для случая коалиционного манипулирования связаны с более высокой сложностью. Если в случае индивидуального манипулирования достаточно рассмотреть случаи, когда только один участник пытается изменить свои предпочтения, то в случае коалиционного манипулирования речь идёт о различных комбинациях множества манипулирующих участников.

Прямолинейные расчёты, т.е. расчёты, рассматривающие все возможные коалиции для случая  $n$  участников, влекут огромную вычислительную сложность, так как количество коалиций может составить  $2^n - 1$ .

За счёт ряда оптимизаций в нашем исследовании были разработаны алгоритмы, позволяющие оценить коалиционную манипулируемость процедур агрегирования для случаев до 100 участников.

## **2. Описание модели**

Процедура агрегирования – это функция, которая ставит в соответствие профилю предпочтений результат процедуры агрегирования. Профиль предпочтений – это набор предпочтений, где каждое предпочтение каждого участника представлено линейным порядком на множестве альтернатив. Результат

процедуры агрегирования – это непустое подмножество множества альтернатив.

Коалиция – это подмножество множества участников. Члены коалиции предъявляют неискренние предпочтения при голосовании, из-за чего может измениться результат процедуры агрегирования. Если существует хотя бы один способ, как хотя бы одна коалиция может каким-то способом предъявить неискренние предпочтения так, что результат процедуры агрегирования станет для них лучше, чем был до этого, то данный профиль считается манипулируемым.

Задача работы – оценить степень манипулируемости различных процедур агрегирования. В работе приводятся результаты для позиционных процедур агрегирования, при этом рассмотренные алгоритмы применимы и для более широкого класса процедур агрегирования.

Список рассматриваемых процедур агрегирования (подробные определения процедур можно найти, например, в [1]):

1. Правило относительного большинства.
2. Одобряющее голосование для  $q = 2$ .
3. Правило Борда.
4. Процедура Блэка.
5. Обратное правило Борда.
6. Обратное правило относительного большинства.
7. Пороговое правило.
8. Процедура Хара.
9. Процедура Нансона.
10. Процедура Кумбса.

### **3. Индексы манипулируемости**

В литературе известно несколько индексов манипулируемости. Самый широко распространённый – индекс Нитцана – Келли, введенный в работах [6] и [7].

Однако есть ряд случаев, когда использование только индекса Нитцана – Келли не даёт всей полноты картины. Например, есть ряд  $q$ -Паретовских процедур, которые являются слабоманипулируемыми. Однако это чаще всего достигается

за счёт низкой разрешимости: если процедура для многих профилей даёт полный выбор (множество из всех альтернатив), то она является слабо или неманипулируемой, но не представляет практической полезности.

Именно поэтому в ряде работ рассматриваются и другие индексы:

1. Индекс разрешимости: он показывает, как часто процедура агрегирования определяет единственного победителя (а не выдаёт ничьи)

2. Индекс свободы манипулирования: он показывает, насколько часто при попытках манипулирования будет получаться результат лучше, хуже или такой же по сравнению с первоначальным (при искренних предпочтениях)

3. Индекс эффективности манипулирования: он показывает, на сколько позиций лучше в предпочтениях может стать результат процедуры агрегирования после успешного манипулирования.

Сочетание анализа индексов манипулируемости может позволить выбирать наиболее оптимальную процедуру агрегирования в зависимости от количества участников голосования и других параметров.

#### **4. Алгоритмы расчёта и вычислительная сложность**

Оценка степени коалиционной манипулируемости процедур агрегирования построена на методе компьютерного моделирования.

Общее количество всех возможных профилей слишком большое, чтобы можно было их все сгенерировать. Поэтому используется метод генерации 1 млн случайных профилей.

Для каждого профиля генерируются все возможные попытки манипулирования всеми возможными группами участников. Мы предполагаем, что в коалицию могут объединяться только те участники, которые хотят продвинуть одного и того же кандидата (трудно представить, чтобы в коалицию объединились в желании продвинуть разных кандидатов).

Для каждой возможной попытки манипулирования каждой возможной коалицией просчитывается результат процедуры агрегирования до и после попытки манипулирования. Если коалиции удалось получить лучший для себя результат, т.е. продвинуть кандидата, вокруг которого они объединились, то эта попытка манипулирования считается удачной.

Далее рассчитываются индексы манипулируемости. Индекс Нитцана – Келли рассчитывается как доля профилей, в которых хотя бы одна коалиция успешно манипулирует. Разрешимость рассчитывается как доля профилей, в которой процедура агрегирования даёт однозначный выбор. Свобода манипулирования рассчитывается как доля случаев, когда попытка манипулирования привела к лучшему, такому же или худшему результату. Наконец, эффективность манипулирования (индексы  $I_2$  и  $I_3$ ) рассчитываются как средние и максимальные выигрыши, которых могут достигнуть манипулирующие коалиции в улучшении исхода процедуры агрегирования.

## **5. Результаты**

Результат исследования – это полученные для 10 процедур агрегирования индексы манипулируемости для случая трёх альтернатив и количества участников от 3 до 30.

Так как результат процедуры агрегирования – это непустое подмножество множества альтернатив, то при ничьих (когда в выбор входит более 1 альтернативы) мы используем модель расширенных предпочтений участников, чтобы определить, стал ли результат процедуры для них лучше или хуже. На рис. 1 приведен пример результатов для случая Лексимин (для участников голосования чем лучше худшая альтернатива в выборе, тем лучше), индекс Нитцана – Келли, 3 альтернативы.

На рис. 2 приведен пример результатов для случая Лексимакс (для участников коалиции чем лучше самая первая альтернатива в выборе, тем лучше), индекс Нитцана – Келли, три альтернативы.

На рис. 3 приведен пример результатов для случая Рискфоб (участники коалиции не склонны к риску), индекс Нитцана – Келли, 3 альтернативы.

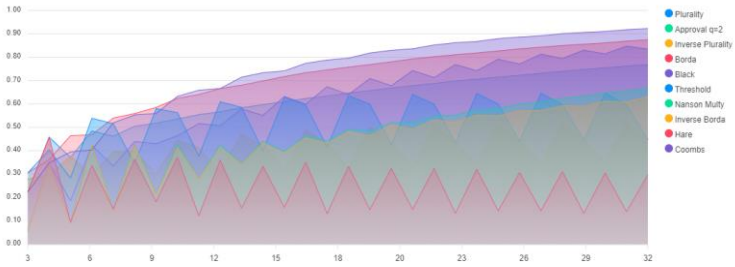


Рис. 1. Индекс Нитцана – Келли для случая трёх альтернатив, расширенные предпочтения Лексимин

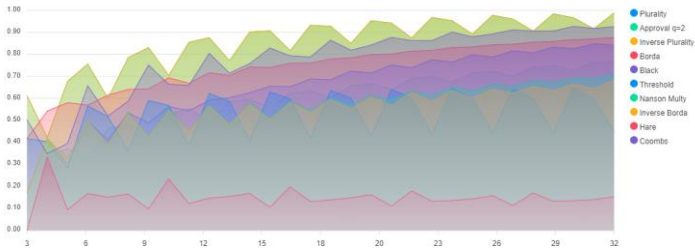


Рис. 2. Индекс Нитцана – Келли для случая трёх альтернатив, расширенные предпочтения Лексимакс

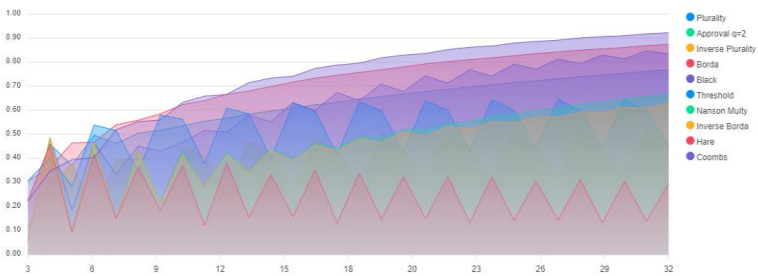


Рис. 3. Индекс Нитцана – Келли для случая трёх альтернатив, расширенные предпочтения Рискфоб

На рис. 4 приведен пример результатов для случая Рискофил (участники коалиции склонны к риску), индекс Нитцана – Келли, 3 альтернативы.

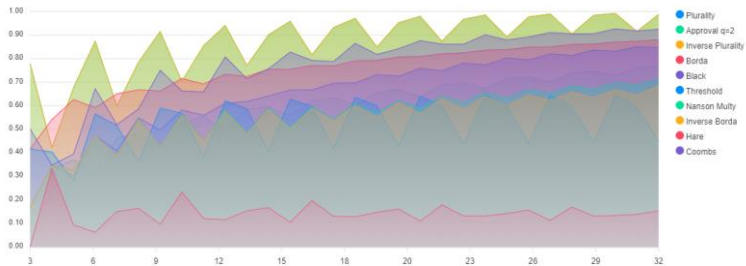


Рис. 4. Индекс Нитцана-Келли для случая трёх альтернатив, расширенные предпочтения Рискофил

По итогам работы становится видно, что среди позиционных процедур агрегирования наименее манипулируемой является процедура Хара. Она показывает наименьшие значения индекса Нитцана – Келли.

Теперь рассмотрим разрешимость. На рис. 5 приведены значения среднего количества альтернатив в результатах каждой процедуры агрегирования.

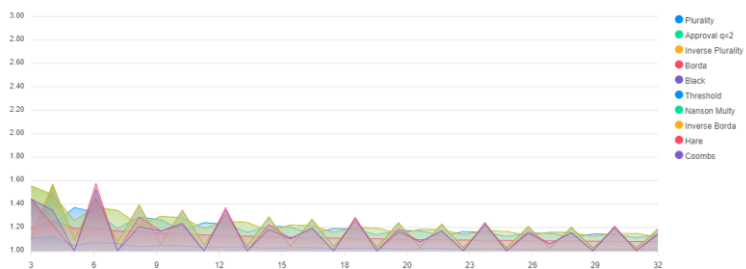


Рис. 5. Среднее количество альтернатив в результате процедуры агрегирования

Процедура Хара не является наиболее разрешимой для всех случаев, однако для большинства количеств участников именно

процедура Хара даёт максимальную разрешимость (минимальное количество альтернатив в выборе) или одну из минимальных разрешимостей.

В результате рассмотрения коалиционного манипулирования для случая, когда коалиция продвигает одного и того же кандидата, были разработаны алгоритмы, позволяющие посчитать ряд индексов манипулируемости за разумное время, а также были получены результаты по этим индексам для 10 позиционных правил. Среди рассмотренных правил наименее манипулируемым оказалась процедура Хара. Данные результаты совпадают с результатами для случаев индивидуального манипулирования из работ [2] и [3]; отметим, однако, что в случае индивидуального манипулирования в литературе также хорошо оценивается процедура Нансона, но в случае рассмотренного коалиционного манипулирования она значительно уступает процедуре Хара.

### ***Литература***

1. ALESKEROV F., KURBANOV E. *Degree of manipulability of social choice procedures* // Alkan A. et al. (eds.) *Current Trends in Economics. Studies in Economic Theory.* – Berlin Heidelberg, N.Y.: Springer, 1999. – Vol. 8. – P. 13–27.
2. ALESKEROV F., KARABEKYAN D., SANVER R., YAKUBA V. *On manipulability of positional voting rules* // Series: *Journal of the Spanish Economic Association.* – 2011. – Vol. 2(4). – P. 431–446.
3. ALESKEROV F., KARABEKYAN D., SANVER R., YAKUBA V. *On the manipulability of voting rules: Case of 4 and 5 Alternatives* // *Mathematical Social Sciences.* – 2012. – Vol. 64(1). – P. 67–73.
4. FAVARDIN P., LEPELLEY D. *Some further results on the manipulability of social choice rules* // *Social Choice and Welfare.* – 2006. – Vol. 26. – P. 485–509.
5. GIBBARD A. *Manipulation of voting schemes* // *Econometrica.* – 1973. – Vol. 41. – P. 587–601.



6. KELLY J. *Almost all social choice rules are highly manipulable, but few aren't* // Social Choice and Welfare. – 1993. – Vol. 10. – P. 161–175.
7. NITZAN S. *The vulnerability of point-voting schemes to preference variation and strategic manipulation* // Public Choice. – 1985. – Vol. 47. – P. 349–370.
8. PRITCHARD G., WILSON M. *Exact results on manipulability of positional voting rules* // Social Choice and Welfare. – 2007. – Vol. 29. – P. 487–513.
9. SATTERTHWAITE M. *Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions* // Journal of Economic Theory. – 1975. – Vol. 10. – P. 187–217.
10. XIA L., CONITZER V. *Generalized scoring rules and the frequency of coalitional manipulability* // Proc. of the 9th ACM conference on Electronic commerce. – 2008. – P. 109–118.

## ON THE ALGORITHMS OF ESTIMATING THE DEGREE OF COALITIONAL MANIPULABILITY

**Alexander Ivanov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, NRU Higher School of Economics, Moscow (ivanovalexalex@gmail.com).

*Abstract: Coalitional manipulation is a situation when a group of agents misrepresent their preferences to obtain a better social choice. Several manipulability indices have been studied in literature: Nitzan – Kelly index, freedom of manipulation, efficiency of manipulation, which show the degree of manipulability of different aggregation procedures. Obtaining a formula for each procedure for each index is a very hard analytical task which may never be solved. Instead of that, we propose to use computer modelling to estimate the indices of manipulability. We generate 1 million profiles and calculate the values of different indices for different cases to find out which procedure is the least manipulable.*

**Keywords:** coalitional manipulability, aggregation procedures, voting, manipulability.

УДК 519.8  
ББК 22.1